25.02.2021

XIX открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

I курс

1. Что происходит с эллипсом $\frac{(x-c)^2}{c^2}+\frac{y^2}{2c}=1$ при $c \to +\infty$?

Решение.

$$\frac{x^2}{c^2}-2\frac{x}{c}+\frac{y^2}{2c}=0, \quad \frac{x^2}{c}-2x+\frac{y^2}{2}=0.$$

При $c \to +\infty$ получаем параболу $y^2=4x$.

Ответ: $y^2=4x$.

2. Каким должен быть угол между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что их длина равна единице, а также длины суммы и разности этих векторов больше единицы.

Решение.

$$|\bar{a}-\bar{b}|=\sqrt{\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2}=\sqrt{\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2}=$$

$$\sqrt{|\bar{a}|^2-2|\bar{a}||\bar{b}|cos\alpha+\left|\bar{b}\right|^2}=\sqrt{1-2cos\alpha+1}=\sqrt{2(1-cos\alpha)}>1.$$

Тогда $cos\alpha<\frac{1}{2}$. Аналогично,

$$|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2}=\sqrt{\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2}=$$

$$\sqrt{|\bar{a}|^2+2|\bar{a}||\bar{b}|cos\alpha+\left|\bar{b}\right|^2}=\sqrt{1+2cos\alpha+1}=\sqrt{2(1+cos\alpha)}>1.$$

Тогда $cos\alpha>-\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

3. Решить матричное уравнение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}^3+\cdots+\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}^n\right)=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Возведем матрицу в квадрат, куб и т.д.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x^2 & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & x^3\\ x^3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x^4 & 0\\ 0 & x^4\end{pmatrix}+\cdots\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}x^2+x^4+x^6+\cdots & x+x^3+x^5+\cdots\\ x+x^3+x^5+\cdots & x^2+x^4+x^6+\cdots\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\frac{x^2}{1-x^2} & \frac{x}{1-x^2}\\ \frac{x}{1-x^2} & \frac{x^2}{1-x^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}. \quad \begin{cases}\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{15},\\ \frac{x}{1-x^2}=\frac{4}{15},\end{cases} \quad \begin{cases}x^2=\frac{1}{16},\\ 4x^2+15x-4=0.\end{cases}$$

Откуда находим $x=1/4$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}$.

4. Найти значения a и b, при которых $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-2x+x^2}-ax-b\right)=0$.

Решение.

$y=ax+b$ – асимптота к графику функции $y=\sqrt{1-2x+x^2}$.

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{x}=-1.$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-2x+x^2}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(|x-1|+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x+x)=1.$

Ответ: $\boldsymbol{a=-1,\ b=1}$.

4. Площадь прямоугольного треугольника равна 16 см^2, а его периметр является наименьшим из возможных при данной площади. Найти длины сторон треугольника и его периметр.

Решение.

$$S=\frac{ab}{2}=16,\ \ ab=32.$$

Периметр

$$P(a)=a+b+c=a+\frac{32}{a}+\sqrt{a^2+\frac{32^2}{a^2}}=a+\frac{32}{a}+\frac{\sqrt{a^4+32^2}}{a}.$$

$$P'(a)=1-\frac{32}{a^2}+\frac{a^4-32^2}{a^2\cdot\sqrt{a^4+32^2}}=\frac{a^2-32}{a^2}\left(1+\frac{a^2+32}{\sqrt{a^4+32^2}}\right).$$

$P'(a)=0$ при $a^2-32=0$. Т.к. $a>0$, $a=4\sqrt{2}$.

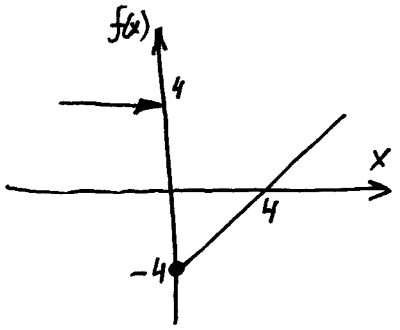
При переходе через критическую точку $P'(a)$ меняет знак с «-» на «+», что соответствует минимуму функции.

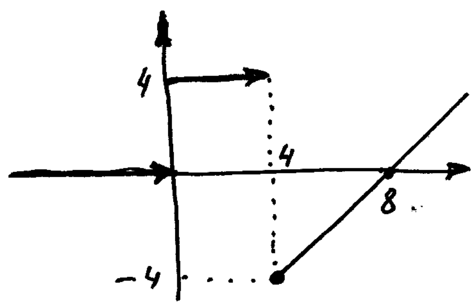
Ответ: $\boldsymbol{a=b=4\sqrt{2},\ c=8,\ P_{min}=8(\sqrt{2}+1)}$.

6. Дана функция $f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geq 0,\\ 4, & x<0.\end{cases}$ Построить график функции $f(f(x))$.

Сколько точек разрыва имеет функция $\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n}$? Указать их.

$f(f(x))=\begin{cases}f(x)-4, & f(x)\geq 0,\\ 4, & f(x)<0.\end{cases}$ $\qquad f(f(x))=\begin{cases}0, & x<0,\\ 4, & 0\leq x<4,\\ x-8, & x\geq 4.\end{cases}$





Ответ: ***n точек разрыва;*** $\boldsymbol{x=\{0,4,8,\dots,4(n-1)\}}$.