<u>**02.03.2012**</u>

X открытая олимпиада по математике
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

I курс - группа А

(технические специальности)

<u>1.</u> Пусть $z = x + y + f(x - y)$. Найти $z(x, y)$, если $z = x^2$ при $y = 0$.

<u>2.</u> Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ верны равенства: $a_{n+1} = F(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 98$. $a_{99} = 0$. Найти $a_{33} + a_{40}$, если $F(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+8}{x-2}, & x < 2, \\ \dfrac{2x-1}{x+1}, & x \ge 2. \end{cases}$

<u>3.</u> Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 1. На его катете как на гипотенузе строится подобный ему треугольник и так далее. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}$, где a_i – длина катета, а S_i - площадь i-го треугольника.

<u>4.</u> На отрезке AB длины l строится последовательность точек $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = A$, $x_2 = B$, каждая следующая точка x_{n+1} является серединой отрезка, соединяющего точки x_{n-1} и x_n. К какой точке отрезка AB стремится последовательность $\{x_n\}$?

<u>5.</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2, \end{cases}$ при всех значениях параметра $a \in R$.

<u>6.</u> На координатной плоскости Oxy дана точка $M(2;4)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины, симметричные относительно оси Oy, лежат на дуге параболы $y = 3x^2$, $(-1 \le x \le 1)$, а точка M является серединой одной из сторон каждого треугольника. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

<u>7.</u> В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E - середина ребра D_1C_1, а точка F лежит на ребре DD_1, так, что $D_1F = 2DF$. Найти синус угла между прямой AD_1 и плоскостью, проходящей через точки A_1, E и F.

Желаем удачи!

<u>02.03.2012</u>

X открытая олимпиада по математике

УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

II-IV курс - группа А (технические специальности)

1. Решить матричное уравнение: $\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $f^{(43)}(0)$, если $f(x)=\sin(x^{13}+x^{15})$.

3. Доказать: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctg\,x$.

4. Для какого числа $t\in[-1,2]$ область, ограниченная прямыми $x=-1$, $x=2$, параболой $y=x^2$ и касательной к этой параболе в точке (t,t^2) имеет наименьшую площадь?

5. В прямой круговой конус, радиус основания которого R, а высота h, последовательно вписываются шары. Найти длины радиусов этих шаров, составить из них ряд и найти его сумму. Найти сумму объемов всех шаров и сравнить с объемом конуса.

6. Пусть k - фиксированное положительное число. n-я производная функции $f(x)=\frac{1}{x^k-1}$ имеет вид: $\frac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$, где $P_n(x)$ - некоторый полином. Найти величину $P_n(1)$.

Желаем удачи!

_02.03.2012_

X открытая олимпиада по математике

УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

I курс - группа Б (экономические специальности)

1. Пусть $z = x + y + f(x - y)$. Найти $z(x, y)$, если $z = x^2$ при $y = 0$.

2. Вычислить: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}.$

3. Найти точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5x^3 - x\,|\,x+1|$ на отрезке [–2;0].

4. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости (k-коэффициент пропорциональности). При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

5. Касательная к графику $y = x^2$ пересекает координатные оси Ox и Oy в точках A и B так, что $OA = OB$. Найти длину отрезка AB.

6. Найти все значения параметров a и b, при которых система $\begin{cases} 3x - 4y = 12, \\ 9x + ay = a^2 + 4 \end{cases}$ а) не имеет решений; б) имеет бесконечное множество решений; с) имеет единственное решение?

_02.03.2012_

X открытая олимпиада по математике

УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

II-IV курс - группа Б (экономические специальности)

1. Найти $f^{(43)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$.

2. Решить матричное уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 1. На его катете как на гипотенузе строится подобный ему треугольник и т.д. Исследовать на сходимость ряд, составленный из длин катетов этих треугольников и, в случае его сходимости, найти сумму ряда.

4. Не вычисляя интегралов, установить, какой из интегралов больше и почему:

$\int\limits_0^{\pi/2} x\,dx$ или $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$?

5. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости Oxy системой неравенств: $\begin{cases} |x| + |y| < 2, \\ y < x^2. \end{cases}$

6. В алфавите племени Тумбу-Юмбу шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Тумбу-Юмбу?
