

**01.03.2013**

XI открытая олимпиада по математике УО «ГТТУ им. П.О.Сухого»

**I курс - группа А** (технические специальности)



1. (Разминка) а) Построить график функции  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2n+1}}$ .
- б) Какой наименьший угол могут образовывать векторы:  $\vec{a}(1; -x; 2)$  и  $\vec{b}(x; 1; 1)$ ?
- в) Источник света, находящийся в точке  $M_0(5, 0, 0)$ , освещает сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Найти уравнение границы тени на плоскости  $yOz$ .
2. Точка  $N$  лежит на графике функции  $y = \frac{x^2 - 12x}{8}$ , точка  $M$  - на кривой  $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 97 = 0$ . Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка  $NM$ ?
3. Доказать, что функция  $f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  отрицательна при  $x > 0$ .
4. Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/n & 2/n \end{pmatrix}^n$ .
5. Найдите значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых сходится последовательность  $x_0 = a, x_n = 1 + b \cdot x_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ . Вычислите её предел в данных случаях.

*Желаем удачи!*



01.03.2013

XI открытая олимпиада по математике  
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»



**II-IV курс - группа А** (технические специальности)

1. Функция  $f(x)$  непрерывна и возрастает на  $[0;1]$ . При каком значении  $C$  минимален интеграл  $\int_0^1 (f(x) - C)^2 dx$ ?

2. а) Решить дифференциальное уравнение:  $y' + y'' + y''' + y^{IV} + \dots = \sin x$ ,  $y(0) = 0$ .

б) Найти решение дифференциального уравнения:  $\left(\frac{d}{dx} - 1\right)^3 f(x) = 0$ , если известно, что функция  $f(x)$  проходит через точки  $(0;1)$  и  $(1;e)$ , имеет с осью  $OX$  одну общую точку и возрастает при  $x \rightarrow \infty$ .

3. Найти площадь между кривой  $y = xe^{-x^2/2}$  и ее асимптотой при  $x \geq 0$ .

4. Два грибника, находясь в лесу в точке А, решили разойтись и встретиться в точке В. Первый прошел путь из точки А в точку В, равный длине одной волны синусоиды  $y = \sin x$ . Второй, заблудившись, вернулся в точку А, пройдя вдоль эллипса  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ . Кто из них прошел более короткий путь?

5. Решить уравнение:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{3^k} = 1$ .

6. Доказать:  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) - \ln 2 = 0$ .

**Желаем удачи!**



01.03.2013

XI открытая олимпиада по математике  
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»



**I курс - группа Б**  
(экономические специальности)

1. Построить график функции  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2n+1}}$ .

2. Какой наименьший угол могут образовывать векторы:  $\vec{a}(1; -x; 2)$  и  $\vec{b}(x; 1; 1)$ ?

3. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

| Вид сырья | Расход сырья по видам продукции (кг на изделие) |    |     | Запас сырья (кг) |
|-----------|---|----|-----|------------------|
|           | I   | II | III |                  |
| A         | 2   | 4  | 5   | 1800             |
| B         | 4   | 2  | 3   | 1300             |
| C         | 3   | 3  | 2   | 1150             |

4. Найти стоимость перевозки  $M$  тонн груза по железной дороге на расстояние  $L$  км при условии, что тариф  $y$  перевозки одной тонны убывает на  $a$  руб. на каждом последующем километре.

5. Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/n & 1/n \end{pmatrix}^n$ .

6. Был очень жаркий день, и четыре пары выпили вместе 44 бутылки кока-колы. Анна выпила 2, Елена 3, Катя 4 и Дина 5 бутылок. Гражданин Иванов выпил столько же бутылок, сколько и его жена, но каждый из других мужчин выпил больше, чем его жена: гр. Петров вдвое, гр. Сидоров в три раза и гр. Васин в четыре раза. Назовите жен этих мужчин.

**Желаем удачи!**



**01.03.2013**

*XI открытая олимпиада по математике УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»*

**II-IV курс - группа Б** (экономические специальности)



1. Функция  $f(x)$  непрерывна и возрастает на  $[0,1]$ . При каком значении  $C$  минимален интеграл  $\int_0^1 (f(x) - C)^2 dx$  ?

2. Решить дифференциальное уравнение:  $y' + y'' + y''' + y^{IV} + \dots = x$ ,  $y(0) = 0$ .

3. Доказать:  $\int_0^1 \sqrt[4]{1-x^4} dx = \int_0^1 \sqrt[4]{4t - 6t^2 + 4t^3 - t^4} dt$ .

4. Мощность  $y$  потребляемой городом электроэнергии выражается формулой

$$y = \begin{cases} a, & t < 6, \\ a + b \sin \frac{\pi}{18}(t - 6), & t \geq 6, \end{cases}$$

где  $t$  - текущее время суток. Найти суточное потребление электроэнергии при  $a = 15000 \text{ кВт}$ ,  $b = 12000 \text{ кВт}$ .

5. Доказать, что функция  $f(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - (1+x)e^{-x}$  положительна при  $x > 0$ .

6. Курс доллара в течение двух месяцев увеличивается на одно и то же число процентов ежемесячно, но не более, чем в 1,5 раза. За сумму, вырученную от продажи в начале первого месяца одного доллара, к концу второго месяца можно было купить на 9 центов меньше, чем в конце первого месяца. На сколько процентов уменьшился курс рубля за два месяца?

01.03.2013

*XI открытая олимпиада по математике*  
*УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»*

**10-11 класс (школьники)**



1. На горизонтальной поверхности лежат в ряд, касаясь друг друга, 100 одинаковых бревен, сплошь вымазанных дегтем. В ложбину между двумя самыми левыми бревнами кладут точно такое же, но чистое бревно и без проскальзывания катят его вправо до самой правой ложбины. Какая часть боковой поверхности этого бревна останется чистой к концу пути?

2. Кусок тонкой проволоки длиной 41 см спиралеобразно намотан на цилиндрическую трубку, образуя 10 витков. Длина трубки 9 см, концы спирали лежат на одной и той же образующей цилиндра. Найти радиус цилиндра.

3. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма этой прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192.

4. Найти все значения  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 64 - 16x} + \sqrt{x^2 + y^2 + 36 + 12y} = 10, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В параболу  $y = x^2$  вписана окружность максимального радиуса, касающаяся параболы в точке  $(0,0)$ . Вторая окружность вписана в параболу и касается первой окружности, третья вписана в параболу и касается второй окружности и т.д. Найти радиус и центр 2013-ой окружности.

*Желаем удачи!*

