**27.02.2020**

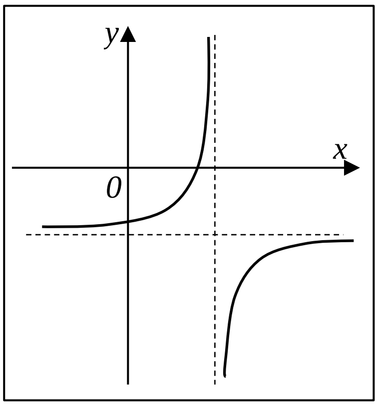
*XVII открытая олимпиада по математике*

*ГГТУ им. П.О.Сухого*

**I курс**

**1.** ***(10 баллов)***

По виду графика функции $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ определить знаки параметров $a, b, c$.




*Решение.*

1) Если $x = 0,\ y = b < 0$;

2) вертикальная асимптота:

$$cx + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{c} > 0, \quad c < 0;$$

3) горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+1} = \frac{a}{c} < 0, \quad a > 0.$$

***Ответ:*** $\boldsymbol{a > 0,\ b < 0,\ c < 0}$**.**

2. Вычислить пределы:

а) ***(10 баллов)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$, б)***(10 баллов)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{8\sqrt[3]{5\ldots\sqrt{8\sqrt[3]{5}}}}}_{2n \text{ корней}}$.

*Решение.*

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} = \left(\frac{(x+a+b)^{x+a}(x+a+b)^{x+b}}{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}\right)^{-1} =$

$$= \left(\left(1 + \frac{b}{x+a}\right)^{x+a}\left(1 + \frac{a}{x+b}\right)^{x+b}\right)^{-1} = (e^b e^a)^{-1} = e^{-a-b}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^2+..+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \cdot 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2+..+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^n} = 8^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5 \cdot 8^3}.$

***Ответ: а)*** $\boldsymbol{e^{-a-b}}$***, б)*** $\boldsymbol{\sqrt[5]{5 \cdot 8^3}}$**.**

3. ***(10 баллов)***

Найти произведение решений $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$ системы линейных уравнений при $n = 2020$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \cdots + 2x_n = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \cdots + 2x_n = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + \cdots + 2x_n = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \cdots + 2x_n = 4, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \cdots + nx_n = n. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 4 & \ldots & 2 & 4\\ & . & . & . & . & . \; . & .\\ 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & n & n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 2\\ & . & . & . & . & . \; . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-2 & n-2 \end{array}\right)$$

К каждой строке добавили вторую, умноженную на -1.

$$x_1 = x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 1, \quad x_2 = 1 - (n-1) = 2 - n.$$

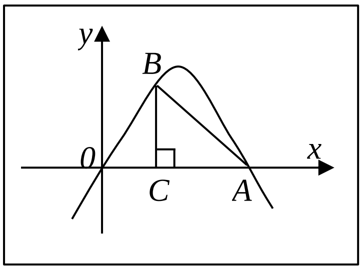
Тогда

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2020} = 2 - 2020 = -2018.$$

***Ответ:*** $\mathbf{-2018}$.

4. ***(10 баллов)*** Одна из вершин прямоугольного треугольника ($\angle ACB = 90°$) находится в точке $A(2{,}0)$, другая в точке С, лежащей на отрезке $[0{,}2]$ оси $OX$. Вершина $B$ лежит на параболе $y = 2x - x^2$. Какими должны быть координаты точки $B$, чтобы площадь треугольника А$B$С была наибольшей.

*Решение.*




Пусть точка $C$ имеет координаты $C(x,0)$, тогда $B(x, 2x - x^2)$. Площадь прямоугольного треугольника

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2}(2x - x^2)(2 - x) = \frac{1}{2} x(2 - x)^2.$$

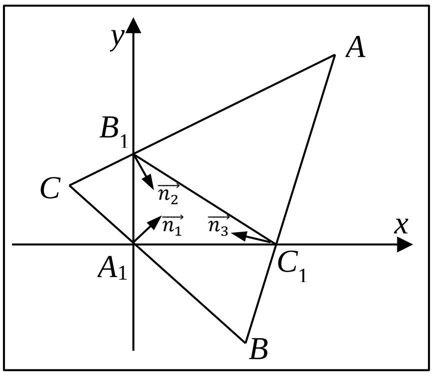
Производная $S' = 0$ в точках $x = \frac{2}{3}$ и $x = 2$.

Площадь максимальна при $x = \frac{2}{3}$. Тогда $B\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{9}\right)$.

***Ответ:*** $\left(\mathbf{\frac{2}{3}; \frac{8}{9}}\right)$.

5. ***(10 баллов)*** Луч, отражаясь от сторон треугольника АВС, движется по замкнутой траектории треугольника $A_1B_1C_1$, $A_1(0{,}0)$, $B_1(0{,}3)$, $C_1(4{,}0)$. Найти координаты вершин треугольника АВС.

*Решение.*




На биссектрисе прямого угла $B_1A_1C_1$ лежит вектор $\overrightarrow{n_1}(1{,}1)$ - нормаль к прямой $B$С : $x + y = 0$.

На биссектрисе угла $A_1B_1C_1$ лежит вектор $\overrightarrow{n_2}\left(\frac{4}{5}; -\frac{8}{5}\right)$ - нормаль к прямой АС : $x - 2y + 6 = 0$.

Вектор $\overrightarrow{n_2}$ находим как сумму единичных векторов, лежащих на $A_1B_1$ и $B_1C_1$.

На биссектрисе угла $B_1C_1A_1$ лежит вектор $\overrightarrow{n_3}\left(\frac{9}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ - нормаль к прямой А$B$ : $x - 2y + 6 = 0$.

Далее, находим точки пересечения прямых:

$B$С : $x + y = 0$,

АС : $x - 2y + 6 = 0$,

А$B$ : $3x - y - 12 = 0$.

***Ответ:*** $\mathbf{A(6;6), B(3,-3), C(-2,2)}$.