Решения задач

<u>25.02.2021</u>

XIX открытая олимпиада по математике

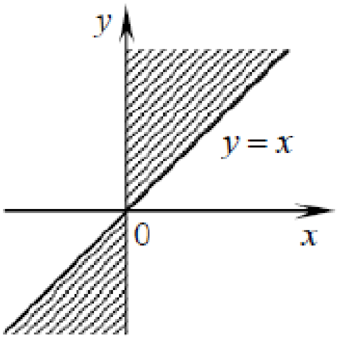
ГГТУ им. П.О.Сухого

Школьники 11 класс

1. *(10 баллов)*

Изобразите множество точек плоскости Oxy, для которых верно равенство $|x| + |y - x| = |y|$.

Решение.



Поскольку сумма модулей двух величин равна модулю их суммы в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый знак, имеем

$$|x| + |y - x| = |y| \iff |x| + |y - x| = |x + (y - x)| \iff$$

$$\iff x(y - x) \geq 0.$$

Искомое множество изображено на рисунке.

2. *(10 баллов)*

Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x - a \leq 0, \\ x^2 - 4x + 6a \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Исходная система неравенств равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x \leq a, \\ \dfrac{4x - x^2}{6} \geq a. \end{cases}$$

Построим графики функций $a = x^2 + 2x = f(x)$ и $a = \dfrac{4x - x^2}{6} = g(x)$ (см. рис. 4).

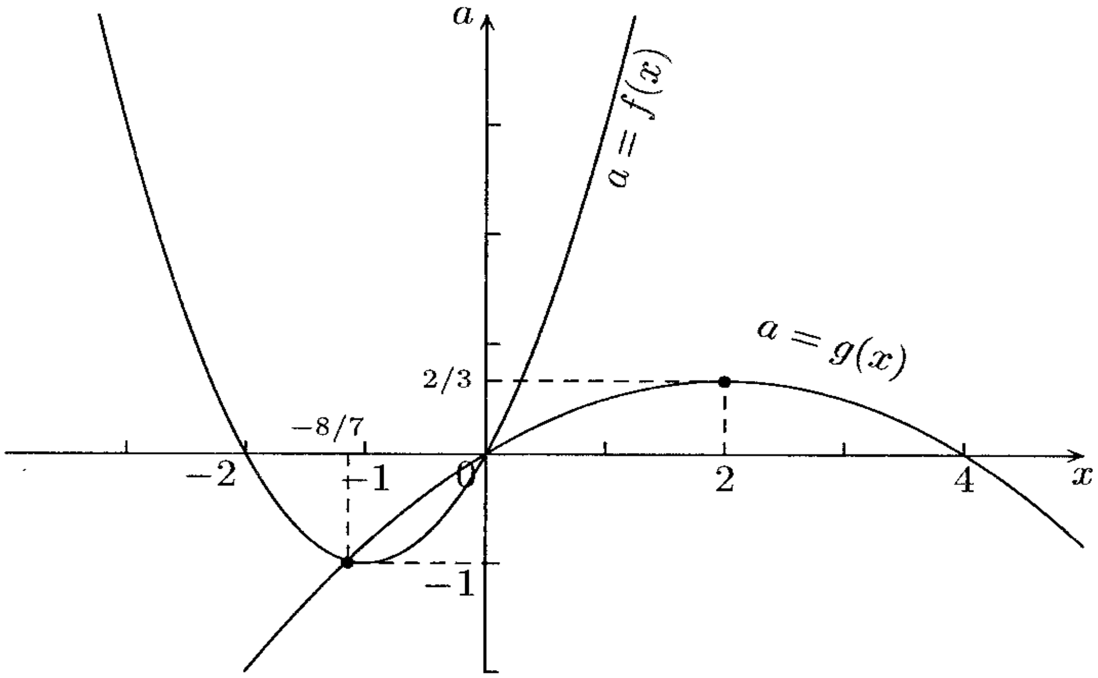


Рис. 4

Эти графики пересекаются в точках с абсциссами $-\dfrac{8}{7}$ и 0, $f(x) \geqslant -1$ и $g(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$ при $x \in \mathbb{R}$.

При $a < -1$ неравенство (1) не имеет решений, а при $a > \dfrac{2}{3}$ неравенство (2) не имеет решений.

При каждом значении $a = a_0$, где $a_0 \geqslant -1$ множество E_1 решений неравенств (1) состоит из абсцисс тех точек графика функции $a = f(x)$, которые лежат ниже прямой $a = a_0$ и на этой прямой.

Аналогично, при каждом $a = a_0$, где $a_0 \leqslant \dfrac{2}{3}$, множество E_2 решений неравенства (2) состоит из абсцисс тех точек графика функции $a = g(x)$, которые лежат выше прямой $a = a_0$ и на этой прямой.

Если $a_0 \in \left(0, \dfrac{2}{3}\right]$, то множества E_1 и E_2 — отрезки (при $a_0 = \dfrac{2}{3}$ множество E_2 — точка $x = 2$), не имеющие общих точек (E_1

и E_2 лежат по разные стороны от точки $x = 0$). В этом случае система (1) – (2) несовместна (не имеет решений).

Если $a_0 = 0$, то множества E_1 и E_2 имеют единственную общую точку $x = 0$, т.е. при $a = 0$ системы (1) – (2) имеет единственное решение.

Если $-1 < a_0 < 0$, то пересечение E множеств E_1 и E_2 — отрезок. В этом случае система имеет бесконечное множество решений (каждая точка $x \in E$ — решение системы (1) – (2)).

Наконец, при $a = -1$ система имеет единственное решение $x = -1$.

Ответ: $\boldsymbol{a = -1,\ a = 0}$.

3. *(10 баллов)*

Решить неравенство

$$log_3(4 - sin3x) \leq cos\frac{12x}{5}.$$

Решение.

Так как $4 - sin3x \geq 3$, то $log_3(4 - sin3x) \geq 1$.

Так как $cos\frac{12x}{5} \leq 1$, то $log_3(4 - sin3x) \geq cos\frac{12x}{5}$.

Получаем уравнение $log_3(4 - sin3x) = cos\frac{12x}{5}$, которое имеет место, если обе части равны 1.

$$\begin{cases} cos\frac{12x}{5} = 1, \\ sin3x = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}(4n + 1), n \in Z \\ x = \frac{5\pi k}{6},\ k \in Z. \end{cases}$$

Находим пересечение : $x = \frac{\pi}{6}(4m + 1), m \in Z$.

Ответ: $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}(4m + 1), m \in Z}$.

4. *(10 баллов)*

Площадь прямоугольного треугольника равна 16 см^2, а его периметр является наименьшим из возможных при данной площади. Найти длины сторон треугольника и его периметр.

Решение.

$$S = \frac{ab}{2} = 16,\ ab = 32.$$

Периметр

$$P(a) = a + b + c = a + \frac{32}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{32^2}{a^2}} = a + \frac{32}{a} + \frac{\sqrt{a^4 + 32^2}}{a}.$$

$$P'(a) = 1 - \frac{32}{a^2} + \frac{a^4 - 32^2}{a^2 \cdot \sqrt{a^4 + 32^2}} = \frac{a^2 - 32}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 + 32}{\sqrt{a^4 + 32^2}}\right).$$

$P'(a) = 0$ при $a^2 - 32 = 0$. Т.к. $a > 0$, $a = 4\sqrt{2}$.

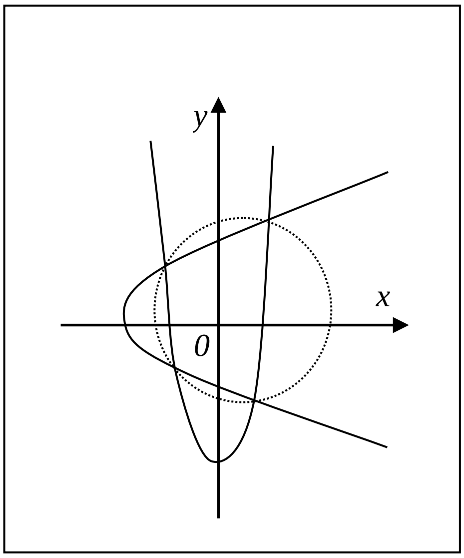
При переходе через критическую точку $P'(a)$ меняет знак с «-» на «+», что соответствует минимуму функции.

Ответ: $\boldsymbol{a = b = 4\sqrt{2},\ c = 8,\ P_{min} = 8(\sqrt{2} + 1)}$.

5. *(10 баллов)*

Даны две параболы, имеющие взаимно перпендикулярные оси. Параболы пересекаются в четырех точках. Доказать, что все эти точки лежат на одной окружности.

Решение.



Возьмем две параболы:

$$x^2 = 2p_1 y \text{ и } y^2 = 2p_2 x$$

при положительных значениях p_1 и p_2. Эти параболы имеют перпендикулярные оси и ветви, направленные в сторону увеличения координат. Для того, чтобы они пересекались, сдвинем их так, чтобы вершины находились при отрицательных значениях координат:

$$x^2 = 2p_1(y - y_1) \text{ и } y^2 = 2p_2(x - x_1).$$

Точки пересечения являются решением системы

$$\begin{cases} x^2 = 2p_1(y - y_1), \\ y^2 = 2p_2(x - x_1). \end{cases}$$

Если четыре точки существуют, то они также будут удовлетворять уравнению, являющемуся суммой двух заданных уравнений системы

$$x^2 + y^2 = 2p_1(y - y_1) + 2p_2(x - x_1).$$

Откуда (выделив полные квадраты) получим

$$(x - p_2)^2 + (y - p_1)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_2 x_1 - 2p_1 y_1.$$

Так как выражение справа положительно, имеем уравнение окружности.

Следовательно, все точки лежат на одной окружности.