

06.03.2015

XIII открытая олимпиада по математике
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»
I курс - группа А (технические специальности)



1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки). Точки K и H есть середины соответственно ребер AA_1 и AD . Точка M - центр грани $CC_1 D_1 D$. Доказать, что прямые KM и $B_1 H$ перпендикулярны.

2. Вычислить определитель 10-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 13 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 19 & 0 & \dots & 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

3. Какое наименьшее значение может принимать длина отрезка, соединяющего проекции на оси координат точки, которая лежит на графике функции $y = 1/x$?

4. Построить график функции $y = |x| e^{-|x-1|}$.

5. На плоскости $3x - 6y + 4z = 12$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до координатных плоскостей является наименьшей.

6. Пусть числа a и b положительны. Исследовать, чему может быть равен предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + 1}{b} \right)^n.$$

7. Пусть S - площадь круга, ограниченного окружностью Γ , σ_n - площадь правильного n - угольника, вписанного в Γ , S_n - площадь правильного n - угольника, описанного вокруг Γ . Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - \sigma_n}{S_n - S}$.

Желаем удачи!



06.03.2015

*XIII открытая олимпиада по математике
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»*



II-IV курс - группа А (технические специальности)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками $y = x^3 + 2x^2$ и $y = x + 2$.

2. Парадокс. Объясните разницу результатов:

1) $\int_0^1 (x^2)' dx = x^2 \Big|_0^1 = 1;$

2) $\int_0^1 (x^2)' dx = \left[x = \frac{t}{2} \right] = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} \right)' d\left(\frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{t^2}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}.$

3. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)!}.$

4. Решить уравнения: а) $|z| = z + 3 + 5i;$ б) $\bar{z} = z^3.$

5. Известно, что $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \varphi.$ Найти $x^n + \frac{1}{x^n}.$

6. Найти все значения $\alpha,$ при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n} \right)^\alpha.$

7. Найти положительную и дифференцируемую на $[0; \infty)$ функцию $y(x),$ если известно, что при замене независимой переменной $z = \int_0^x y(t) dt$ она переходит в функцию $e^{-z}.$

Желаем удачи!



06.03.2015

XIII открытая олимпиада по математике УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

I-IV курс - группа Б (экономические специальности)



1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки). Точки K и H есть середины соответственно ребер AA_1 и AD . Точка M - центр грани $CC_1 D_1 D$. Доказать, что прямые KM и $B_1 H$ перпендикулярны.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 13 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 19 & 0 & \dots & 0 & 9 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 10-го порядка:

3. Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50% и электричество на 20%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 36%. Если бы коммунальные услуги и телефон подорожали на 20%, а электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 29%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на коммунальные услуги, телефон и электричество соответственно?

4. Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия – монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 190 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 880 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

5. На прямой $3x - 6y = 12$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до координатных осей является наименьшей.

6. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) \ln(x+1) - x}{e^x - x - 1}$.

7. Один вкладчик положил в сбербанк некоторую сумму денег, а другой – вдвое большую сумму. Сумма первого вкладчика через t лет составила p руб., а сумма второго через n лет, где $t \neq n$, составила q руб. Определить, какова первоначальная сумма денег первого вкладчика и сколько процентов в год выплачивает банк (учесть ежегодную капитализацию).

Желаем удачи!

06.03.2015

XIII открытая олимпиада по математике

УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

10-11 класс (школьники)



1. Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия – монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 190 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 880 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

2. Какое наименьшее значение может принимать длина отрезка, соединяющего проекции на оси координат точки, которая лежит на графике функции $y = 1/x$?

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Найти синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD .

4. Решить неравенства:

а) $x^3 + 2x + 3\sqrt{5x^3 + 3x + 1} \geq 12$.

б) $\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0$.

5. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой

неравенств $\begin{cases} 4y^2 - 25 \leq 0, \\ x^2 + y^2 \geq 5, \\ (3x + y)(2x + y + 5) \leq 0. \end{cases}$

6. Один вкладчик положил в сбербанк некоторую сумму денег, а другой – вдвое большую сумму. Сумма первого вкладчика через m лет составила p руб., а сумма второго через n лет, где $m \neq n$, составила q руб. Определить, какова первоначальная сумма денег первого вкладчика и сколько процентов в год выплачивает банк.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(a - 6 + |x - 1|)(a - x^2 + 2x) = 0$ имеет: а) ровно два корня; б) ровно три корня.

Желаем удачи!

