28.02.2019

XVII открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

9-10 класс (школьники)

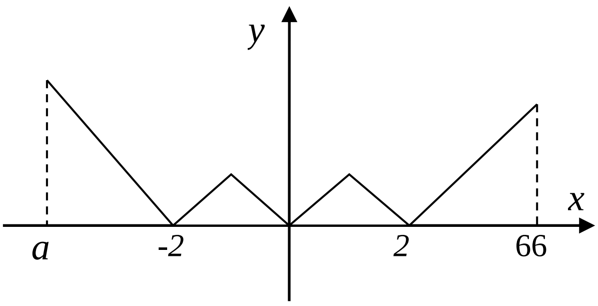
1. Сколько существует квадратных уравнений вида $x^2 - px - q = 0$, ($p \in N, q \in N$), имеющих положительный корень, не превышающий 6.

Решение. $x = \dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $q \le 36 - 6p$, $p = 1, 2, 3, 4, 5$. *Всего уравнений:* $30 + 24 + 18 + 12 + 6 = 90.$

Ответ: **90.**

2. Найти значение параметра a, при котором площадь, ограниченная линиями $y = \left|\,\left|\,|x| - 1\right| - 1\right|$, $y = 0,\ x = a,\ x = 66,$ равна 2100 ед^2.

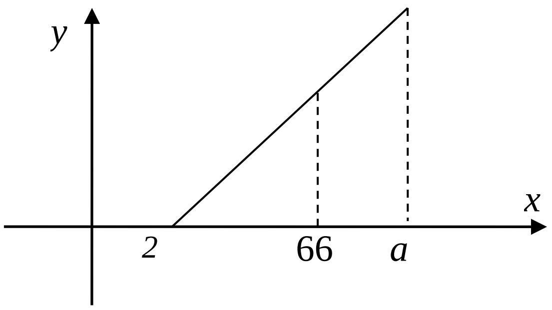
Решение.



Если $a < -2$ *, общая площадь под графиками указанных функций:*

$$S = \frac{1}{2}(-2-a)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\right) + \frac{1}{2}64^2 = 2100.$$

Откуда: $a = -12.$



Если $a > 66$ *, то искомая площадь-площадь трапеции:*

$$S = \frac{(a-2)+64}{2}\cdot(a-66) = 2100.$$

Откуда: $a = 2 + \sqrt{8296}.$

Ответ: $a_1 = -12,\ a_2 = 2 + \sqrt{8296}.$

3. Решить уравнение $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots+\dfrac{1}{462}} = 462.$

Решение. *Заметим, что в числителе дроби находится сумма n+1 слагаемых. В знаменателе записываем каждую дробь как разность двух дробей:*

$$\frac{(1+2n+1)(n+1)}{2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{21\cdot 22}\right)} = 462. \qquad \frac{(n+1)^2}{\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{21}-\dfrac{1}{22}\right)} = 21\cdot 22.$$

$$\frac{(n+1)^2}{1-\dfrac{1}{22}} = 21\cdot 22. \qquad (n+1)^2 = 21^2. \quad n = 20.$$

Ответ: $n = 20$**.**

4. Решить уравнение $\sqrt[3]{\frac{x+56}{x}}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{x+19}{x}}=8.$

Решение. (самое короткое) *Функция* $y(x)=\sqrt[3]{1+\frac{56}{x}}+4\sqrt[3]{1+\frac{19}{x}}$ *при* $x<0$ *принимает значения меньше 5-ти. При* $x>0$ *функция* $y(x)$ *(монотонно) убывает. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня,* $x=8$.

Ответ: $x=8$.

5. Аня, Катя и Лена решали тест по математике. Аня решила правильно 40 задач, Катя -35, Лена -50. Втроём они правильно решили 68 задач. Задача считалась «сложной», если её решила только одна из девочек, «лёгкой», если её решили трое. На сколько больше оказалось «сложных» задач, чем «легких»?

Решение. *Пусть* s *- количество «сложных» задач,* l *- количество «лёгких» задач,* d *- задачу решили двое.*

$s+l+d=68,$

$s+2d+3l=40+35+50.$

Умножим первое уравнение на 2 и вычтем второе. Получим: $s-l=11.$

Ответ: «сложных» задач на 11 больше чем «легких».

6. Пусть a_1,a_2,a_3 - арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Известно, что $a_1\cdot a_2$, $a_2\cdot a_3$, $a_3\cdot a_1$ – геометрическая прогрессия. Найти её знаменатель.

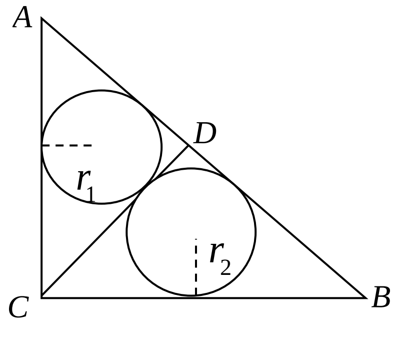
Решение. *Знаменатель геометрической прогрессии* $q=\frac{a_3}{a_1}$, $q=\frac{a_1}{a_2}$. *Тогда*

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2},\quad a_1^2=(a_1+d)(a_1+2d),\quad d=-\frac{3}{2}a_1,\quad q=\frac{a_1}{a_1+d}=\frac{1}{1-3/2}=-2.$$

Ответ: $q=-2$.

7. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведена высота. В полученные треугольники вписали окружности радиусов 3 и 4. Найти радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

Решение.



Пусть r *- радиус вписанной в треугольник* $\triangle ABC$ *окружности,* $r_1=3$, $r_2=4$,

$AC=a,\quad BC=b,\quad AB=c.$

Из подобия $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle CBD$ *следует, что*

$$\frac{AC}{BC}=\frac{r_1}{r_2}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{3}{4}b.$$

$$\frac{BC}{AB}=\frac{r_2}{r}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{4}{b}c.$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{5b}{4}\quad\Rightarrow\quad r=5.$$

Ответ: $r=5$.

28.02.2019

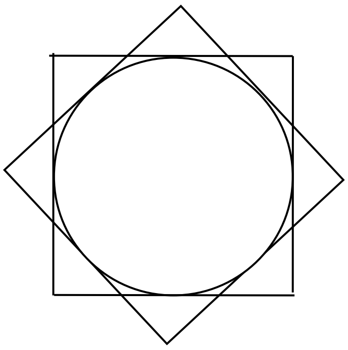
XVII открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

11 класс (школьники)

1. Длина ребра куба равна 4. Куб повернули вокруг высоты, проходящей через центр его основания на угол 45°. Требуется обосновать, что объем общей части исходного и полученного после поворота кубов не меньше чем 32.

Решение.



Исходный куб и куб, , полученный после поворота, имеют общий центр и общую вписанную сферу. Тогда объём их общей части не меньше, чем объём сферы:

$$V_{общ.} \geq \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 > 32.$$

2. Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ образуют геометрическую прогрессию. Известно, что $a_1 + a_2 + ... + a_n = S$, а $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = V$. Найти произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$.

Решение. *Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии:* $S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$,

$$V = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + ... + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{a_1}\left(1 + \frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{1}{a_1}\frac{\frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} q \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}.$$

Тогда $\frac{S}{V} = a_1^2 q^{n-1}$,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = a_1^n q^{1+2+3+...+(n-1)} = a_1^n q^{n(n-1)/2} = \left(a_1^2 q^{n-1}\right)^{n/2} = \left(\frac{S}{V}\right)^{n/2} = \sqrt{\left(\frac{S}{V}\right)^n}.$$

Ответ: $\sqrt{\left(\frac{S}{V}\right)^n}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$

Решение. ***1-й способ.***

Представим подкоренное выражение в виде:

$$1 + 2x\sqrt{1 - x^2} = x^2 + 1 - x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2} = \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 .$$

Тогда уравнение можно записать $\left|x + \sqrt{1 - x^2}\right| - \sqrt{2}\left(1 - x^2 - x^2\right) = 0, \quad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}};$

$\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|-\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)=0.$ *И т.д.*

Решение: $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2-й способ.

Сделаем замену $x=\sin t,\quad t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, *тогда уравнение примет вид*

$$\frac{|\sin t+\cos t|}{\sqrt{2}}=\sin 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\ \text{или}\ \left|\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$$

Решениями данного уравнения с учетом ОДЗ являются $t_1=-\dfrac{\pi}{4},\quad t_2=\dfrac{\pi}{12}$.

Тогда $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4. Решить уравнение $\cos^2\left((x-3)\sin x\right)-\left|\log_5\left(x^2-5x+7\right)\right|=1.$

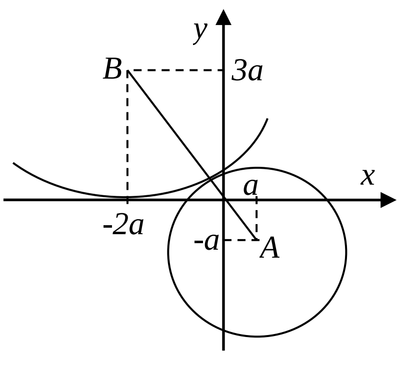
<u>*Решение.*</u> *Учитывая, что* $\cos^2\alpha\le 1$, *равенство возможно при* $x^2-5x+7=1,\quad x_1=2, x_2=3.$ *Но только при* $x=3$ $\cos^2\left((x-3)\sin x\right)=1.$

Ответ: $x=3$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$\begin{cases}x^2+y^2\le 1-a^2+2ax-2ay+2a,\\ x^2+y^2\le 2+3a^2-2a(4+2x-3y)\end{cases}$ имеет единственное решение.

<u>*Решение.*</u> *Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому неравенству системы* $(x-a)^2+(y+a)^2\le(a+1)^2$ - *это круг с центром в точке* $A(a,-a)$ *и радиусом* $|a+1|$.



Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму неравенству системы $(x+2a)^2+(y-3a)^2\le(4a-1)^2+1$ - *это круг с центром в точке* $B(-2a,3a)$ *и радиусом* $\sqrt{(4a-1)^2+1}$.

По условию задачи эти круги должны иметь одну общую точку. Это возможно тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно сумме радиусов.

$\sqrt{9a^2+16a^2}=|a+1|+\sqrt{(4a-1)^2+1},\qquad |5a|-|a+1|=\sqrt{(4a-1)^2+1}.$

Из последнего уравнения следует, что

$|5a|-|a+1|>0,\quad\Rightarrow\quad a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\infty\right).$

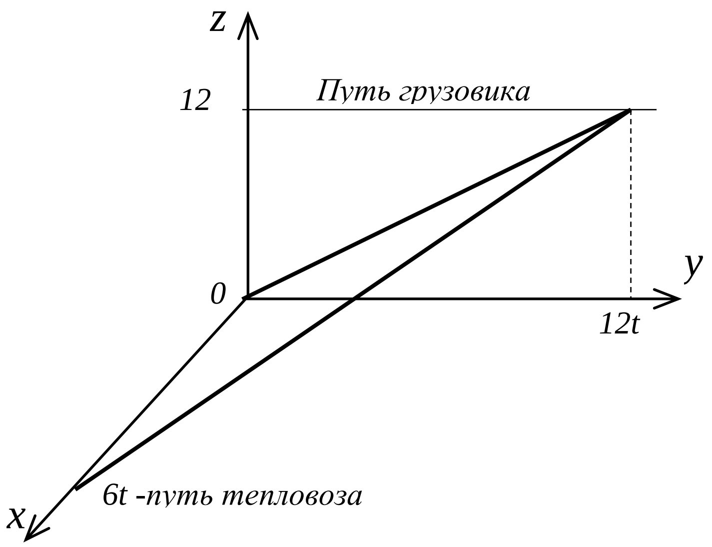
Ищем решение на промежутках: $(-\infty;-1),[-1;-1/6),(1/4;\infty)$. *Получаем, что таких значений параметра а нет.*

Ответ: $\varnothing$ **.**

Замечание! Можно построить графики функций:
$y_1 = |5x| - |x+1|, \qquad y_2 = \sqrt{(4x-1)^2+1}$ ***(верхняя ветвь гиперболы) и показать, что точек пересечения у них нет.***

6. Автомобильный мост находится на высоте 12 метров над железной дорогой. В некоторый момент времени грузовик на мосту находится прямо над идущим внизу тепловозом. Пути грузовика и тепловоза образуют прямой угол. Скорость тепловоза 6 м/с, скорость грузовика 12 м/с. С какой скоростью будет увеличиваться расстояние между грузовиком и тепловозом через 10 с?

Решение.



Путь, пройденный тепловозом за время t секунд, равен $6t$ *м. Путь, пройденный грузовиком за то же время,* $12t$ *м. Расстояние между грузовиком и тепловозом через t секунд:*

$$l(t) = \sqrt{12^2 + (12t)^2 + (6t)^2} = 6\sqrt{4+5t^2}.$$

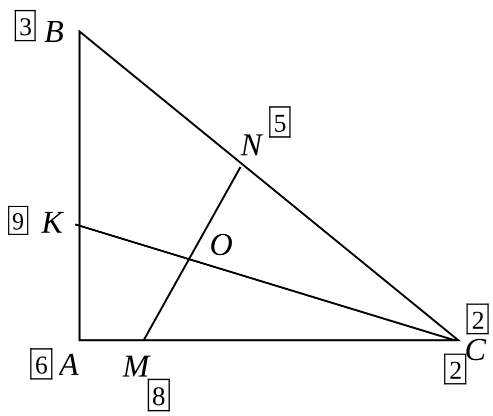
Скорость изменения пути определяется производной:

$$l'(t) = \frac{30t}{\sqrt{4+5t^2}}. \qquad l'(10) = \frac{50}{\sqrt{14}}\frac{м}{c}.$$

Ответ: *Расстояние увеличивается со скоростью* $\frac{50}{\sqrt{14}}\frac{м}{c}$.

7. В прямоугольном треугольнике *ABC* точка *K* делит катет *AB* в отношении 1:2, считая от вершины *A*. Точка *M* делит катет *AC* в отношении 1:3, считая от вершины *A*. Точка *N* делит гипотенузу в отношении 2:3, считая от вершины *B*. Найти, в каком отношении точка *O* пересечения отрезков *KC* и *MN* делит эти отрезки.

Решение.



1-й способ

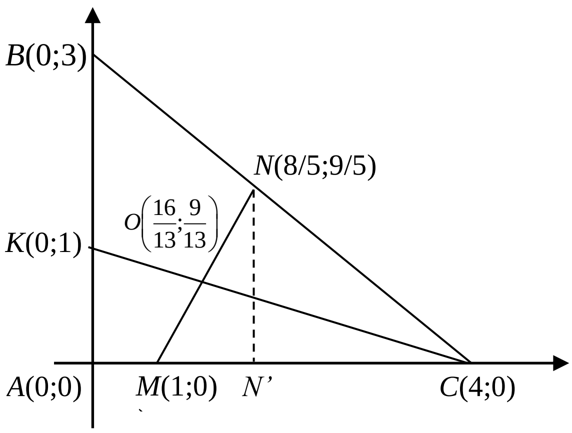
Разместим в вершины треугольника грузы: в точке A груз $\boxed{6}$*, в точке B груз* $\boxed{3}$ *, а в точке C два груза* $\boxed{2}$ *и* $\boxed{2}$ *соответственно сторонам AC и BC. Сумма грузов равна 13.*
Тогда:
1)центр масс отрезка AB будет в точке K (точке K соответствует груз $\boxed{9}$*);*
2)центр масс отрезка AC будет в точке M (точке M соответствует груз $\boxed{8}$*);*
3)центр масс отрезка BC будет в точке N (точке N соответствует груз $\boxed{5}$*).*

Для системы материальных точек 6А, 3В, 2С, 2С точка О – является центром масс. С другой стороны, точка О является центром масс отрезка КС: $\frac{(6A+3B)+(2C+2C)}{13}=\frac{9K+4C}{13}$, *тогда точка О делит отрезок КС в отношении 4:9, считая от точки К.*
Аналогично, точка О является центром масс отрезка MN $\frac{(6A+3B)+(2C+2C)}{13}=\frac{(6A+2C)+(3B+2C)}{13}=\frac{8M+5N}{13}$, *тогда точка О делит отрезок MN в отношении 5:8, считая от точки М.*

Итак, центр масс есть точка О пересечения отрезков КС и MN, которые разделены им соответственно в соотношениях 4:9 и 5:8.

Ответ: 4:9 и 5:8.

2-й способ. *Разместим треугольник АВС в систему координат. Возьмем, для простоты, длины сторон равными 3,4 и 5.*



Из подобия треугольников АВС и CNN' можно найти координаты точки N(8/5;9/5).
Уравнение прямой MN: $y=3x-3$.
Уравнение прямой КС: $y=1-\frac{x}{4}$.
Находим точку O(16/13;9/13) пересечения прямых MN и КС.

Найдем отношение: $\frac{KO}{OC}=\frac{\sqrt{\left(\frac{16}{13}\right)^2+\left(\frac{9}{13}-1\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{16}{13}-4\right)^2+\left(\frac{9}{13}\right)^2}}=\frac{4\sqrt{17}}{9\sqrt{17}}=\frac{4}{9}.$

Найдем отношение: $\frac{MO}{ON}=\frac{\sqrt{\left(\frac{16}{13}-1\right)^2+\left(\frac{9}{13}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{16}{13}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{13}-\frac{9}{5}\right)^2}}=\frac{\frac{3}{13}\sqrt{1+9}}{\frac{8}{13\cdot 5}\sqrt{9+9^2}}=\frac{15\sqrt{10}}{8\sqrt{90}}=\frac{5}{8}.$

Ответ: 4:9 и 5:8.