

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

25.02.2022XX открытая олимпиада по математике  
ГГТУ им. П.О.Сухого

I-IV курс (экономические специальности)

Все задачи оценивались в 10 баллов.

1. В выражении  $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10$  нужно расставить скобки так, чтобы результат был: а) минимален, б) максимален.

Решение.

а)  $(((((1:2):3):4):5):6):7):8):9):10) = 1/10!$  (или без скобок).

б)  $1:(((2:3):4):5):6):7):8):9):10) = 10!/4.$

2. Матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу  $A^n$ .

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Применим метод математической индукции. Пусть

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Сумма чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1011}$  равна  $2022^2$ . Найти  $a_{17}$ , если известно, что

$$\frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{a_2}{a_2 + 3} = \frac{a_3}{a_3 + 5} = \dots = \frac{a_{1011}}{a_{1011} + 2021}.$$

Решение.

Перевернем дроби:

$$\frac{a_1 + 1}{a_1} = \frac{a_2 + 3}{a_2} = \frac{a_3 + 5}{a_3} = \dots = \frac{a_{1011} + 2021}{a_{1011}},$$

тогда

$$\frac{1}{a_1} = \frac{3}{a_2} = \frac{5}{a_3} = \dots, \quad a_n = (2n - 1)a_1,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1(1 + 3 + \dots + (2n - 1)) = a_1 n^2,$$

при  $n = 1011$ :

$$a_1 \cdot 1011^2 = 2022^2, \quad a_1 = 4, \quad a_{17} = (2 \cdot 17 - 1) \cdot 4 = 132.$$

**Ответ:  $a_{17} = 132$ .**

4. Тетушка оставила завещание, согласно которому старший племянник получает из наследства 1000 рублей и 0,1 остатка, второй получает 2000 рублей и 0,1 нового остатка, третий получает 3000 рублей и 0,1 остатка и т.д. Все племянники получили равные доли. Найти размер наследства и число племянников.

*Решение.*

Пусть  $x$  – размер наследства.

Старший получил долю:  $1000 + (x - 1000) \cdot 0,1 = 900 + 0,1x$ .

Второй:

$$2000 + (x - (1000 + (x - 1000) \cdot 0,1) - 2000) \cdot 0,1 = 1710 + 0,1x - 0,01x.$$

Так как доли равны

$$900 + 0,1x = 1710 + 0,1x - 0,01x.$$

Размер наследства  $x = 81000$ , доля каждого – 9000, число племянников – 9.

**Ответ: Размер наследства  $x = 81000$ , число племянников – 9.**

5. Стоимость часа пути автобуса задается формулой

$$y = 1000 + \frac{v^3}{1000},$$

где  $v$  – скорость движения. Найти скорость, при которой стоимость 1 км пути минимальна.

*Решение.*

Стоимость 1 км пути

$$f(v) = \frac{y}{v} = \frac{1000}{v} + \frac{v^2}{1000}.$$

Исследуем функцию  $f(v)$  на экстремум.

$$f' = -\frac{1000}{v^2} + \frac{2v}{1000} = 0, \quad v_0 = 50\sqrt[3]{4} \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

$$f' < 0 \text{ при } v < v_0, \quad f' > 0 \text{ при } v > v_0.$$

Следовательно, при  $v = v_0$  функция  $f(v)$  принимает минимальное значение  $f(v_0) = 15\sqrt[3]{2}$  у.е.

**Ответ:  $v_0 = 50\sqrt[3]{4} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ .**

6. В кабинете стоит 14 столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками. Общее число ящиков 33. Столов с одним ящиком столько же, сколько с двумя и тремя ящиками вместе. Сколько столов с одним ящиком?

*Решение.*

Пусть  $x, y, z, v$  – число столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками.

$$\begin{cases} x + y + z + v = 14, \\ x + 2y + 3z + 4v = 33, \\ x = y + z. \end{cases} \quad \begin{cases} v = 14 - 2y - 2z, \\ 3y + 4z + 4(14 - 2y - 2z) = 33, \\ x = y + z. \end{cases}$$

Откуда

$$-5y - 4z = 33 - 56, \quad 5y + 4z = 23.$$

$$y = 1: \emptyset,$$

$$y = 2: \emptyset,$$

$$y = 3: z = 2 \Rightarrow x = 5, \quad v = 4.$$

**Ответ: 5.**