

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

25.02.2022

XX открытая олимпиада по математике ГГТУ им. П.О. Сухого
I курс–технические специальности



1. (5 баллов) Лежат ли точки $A(2,1,1)$ и $B(2,1,3)$ по одну сторону от плоскости $x + 2y - z - 2 = 0$?

Решение. Подставим координаты точек $A(2,1,1)$ и $B(2,1,3)$ в уравнение плоскости. Пусть $f(M) = f(x, y, z) = x + 2y - z - 2$.

$$f(A) = 2 + 2 - 1 - 2 = 1 > 0;$$

$$f(B) = 2 + 2 - 3 - 2 = -1 < 0;$$

Так как $f(A)$ и $f(B)$ имеют разные знаки, точки A и B находятся по разные стороны от плоскости $x + 2y - z - 2 = 0$.

Ответ: Нет, не лежат.

2. (10 баллов) Точка движется по кривой $48y = x^3$. Исследовать, какая из ее координат изменяется быстрее.

Решение.

Пусть $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Тогда $48y'(t) = 3x^2(t)x'(t)$.

$$\frac{y'}{x'} = \frac{x^2}{16}.$$

Тогда 1) при $|x| > 4$ y изменяется быстрее x ;

2) при $|x| < 4$ x изменяется быстрее y ;

3) при $x = \pm 4$ скорости одинаковы.

3. (10 баллов) Вычислить предел: $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} ((\sin \sqrt{\alpha+1} - \sin \sqrt{\alpha}) \cdot (\cos \sqrt{\alpha+1} + \cos \sqrt{\alpha}))$.

Решение.

Используем формулы:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}{2} \cos \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}{2} \cdot 2 \cos \frac{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}{2} \cos \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}{2} \right) = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(2 \sin(\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}) \cdot \cos^2 \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{(\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha})} = 0, \quad \cos^2 \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{\alpha}}{2} \in [0,1].$$

Ответ: 0.

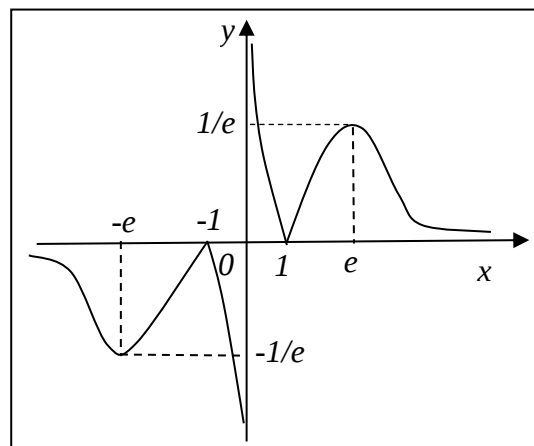
4. (10 баллов) Исследовать функцию и построить её график $y = \frac{|\ln|x||}{x}$.

Решение. Функция является нечетной, поэтому симметрична относительно начала координат. Построим график при $x > 0$.

$$x \neq 0. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|\ln|x||}{x} = \frac{+\infty}{+0} = +\infty.$$

$$\text{При } x > 0 \quad y = \frac{|\ln|x||}{x} = \begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & 0 < x < 1, \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ точка максимума } \left(e, \frac{1}{e}\right).$$



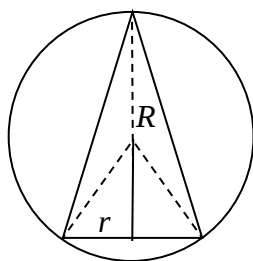
5. (10 баллов) Матрица $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^n .

Решение. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + 5E$, при этом $B^n = 2^{n-1}B$.

$$\begin{aligned} A^n &= (B + 5E)^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 5^k B^{n-k} + 5^n E = \frac{B}{2} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 5^k 2^{n-k} + 5^n E = \\ &= \frac{2^n + C_n^1 5 \cdot 2^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} 2 \cdot 5^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^n + 5^n & 5^n - 5^n \\ 5^n - 5^n & 5^n + 5^n \end{pmatrix} = \\ &= \frac{(2+5)^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^n & -5^n \\ -5^n & 5^n \end{pmatrix} = \frac{7^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5^n}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A^n = \begin{pmatrix} \frac{7^n+5^n}{2} & \frac{7^n-5^n}{2} \\ \frac{7^n-5^n}{2} & \frac{7^n+5^n}{2} \end{pmatrix}.$$

6. (10 баллов) Найти максимально возможное отношение объема конуса к объему шара радиуса R , содержащего этот конус.



Решение. Пусть r – радиус основания конуса, R – радиус шара. Исследуем функцию:

$$f(r) = \frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^2(R + \sqrt{R^2 - r^2})}{4R^3}.$$

$$f'(r) = \frac{r}{4R^3} \left(2R + 2\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = 0,$$

откуда $r_0^2 = \frac{8}{9}R^2$ (при $r^2 < r_0^2$ $f'(r) > 0$; $r^2 > r_0^2$ $f'(r) < 0$).

Максимум функции: $f(r_0^2) = \frac{8}{27}$.

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Решения задач

25.02.2022

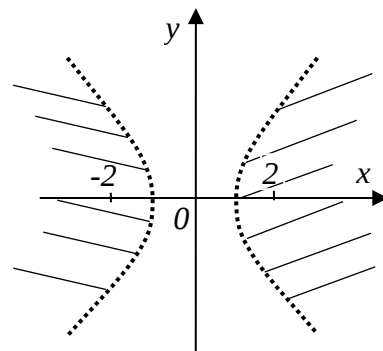
XX открытая олимпиада по математике
ГГТУ им. П.О.Сухого **II-IV курс**



1. (5 баллов) Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием $|z - 2| - |z + 2| > 3$?

Решение. $|z - 2| - |z + 2| = 3$ – уравнение гиперболы (разность расстояний от точки z до точек 2 и -2 есть величина постоянная и равная $3 = 2a$), полуоси гиперболы $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

$$\frac{x^2}{9/4} - \frac{y^2}{7/4} > 1.$$



2. (10 баллов) Точки $A(1,0,1)$ и $B(0,5,5)$ находятся на поверхности $x^2 + y^2 = z^2$. Найти кратчайший путь от A до B по поверхности (записать уравнение кривой).

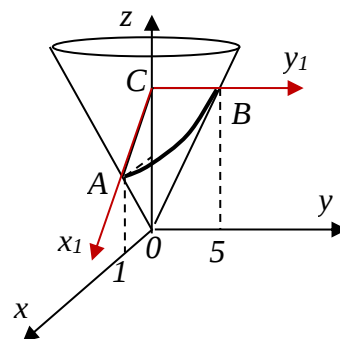
Решение.

Уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ задает конус. Кратчайший путь, соединяющий точки A и B – дуга четверти эллипса с центром в точке $C(0,0,5)$ и полуосями AC и BC :

$$|AC| = \sqrt{17}, \quad |BC| = 5.$$

Кратчайший путь от A до B по четверти эллипса

$$\frac{x_1^2}{17} + \frac{y_1^2}{25} = 1 \quad \text{в плоскости } ABC.$$



3. (10 баллов) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \left((1+x)(1+2x)^{1/2}(1+3x)^{1/3} \dots (1+2022x)^{1/2022} - 1 \right).$$

Решение. Учитывая, что $(1+kx)^{\frac{1}{k}} \approx 1+x$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x)^{2022} - 1)}{x} = 2022.$$

Ответ: 2022.

4. (10 баллов) Пусть a_n – числовая последовательность ($a_n \in \mathbb{N}$). Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

если известно, что $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ и $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$.

Решение. Пусть

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \left(S - \frac{a_1}{2} \right) = 2S - 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^{n+2}} = 4 \left(S - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} \right) = 4S - 3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+3}}{2^n} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+3}}{2^{n+3}} = 8 \left(S - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} - \frac{a_3}{8} \right) = 8S - 7.$$

По условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+3}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{2^n},$$
$$8S - 7 = S + 2S - 1 + 4S - 3, \quad S = 3.$$

Ответ: $S = 3$.

5. (10 баллов) Найти наименьшее значение функции

$$F(k) = \int_0^1 |x^2 - 1 + 2kx + k^2| dx, \quad k > 0.$$

Решение.

$$y = x^2 - 1 + 2kx + k^2 = (x + k)^2 - 1 = (x + k - 1)(x + k + 1).$$

1) Если $0 < k < 1$, то для $x \in [0, 1]$ $y = 0$ в точке $x = 1 - k$. Раскрывая модуль $|x^2 - 1 + 2kx + k^2|$, получаем

$$F(k) = - \int_0^{1-k} (x^2 - 1 + 2kx + k^2) dx + \int_{1-k}^1 (x^2 - 1 + 2kx + k^2) dx =$$

$$= \frac{2}{3}k^3 + k^2 - k + \frac{2}{3}. \quad F'(k) = 0 \text{ при } k = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{так как } k > 0, \text{ то } k = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad F\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Если $k \geq 1$, то для $x \in [0, 1]$ имеем, что $y = x^2 + 2kx + k^2 - 1 \geq 0$.

$$F(k) = \int_0^1 (x^2 - 1 + 2kx + k^2) dx = k^2 + k - \frac{2}{3}. \quad F'(k) = 0 \text{ при } k = -\frac{1}{2},$$

так как $k \geq 1$, то наименьшее значение – это $F(1) = \frac{4}{3}$.

Следовательно, наименьшее значение $F(k) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. (10 баллов) В цилиндрический стакан, имеющий внутри осевое сечение вида $y = x^4$, опущен металлический шарик. Каким должен быть радиус шарика, чтобы он касался нижней точки дна стакана.

Решение.

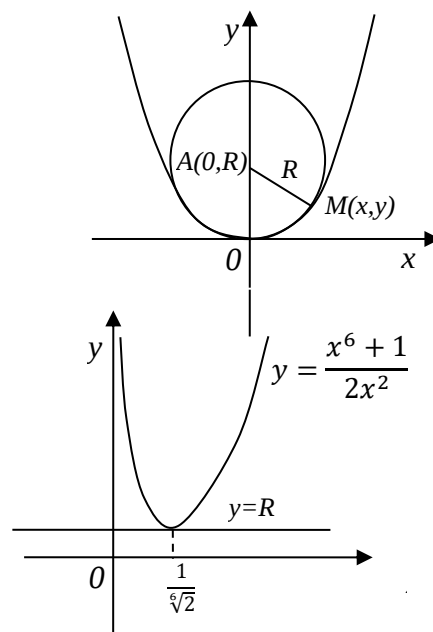
$$|AM| = \sqrt{x^2 + (y - R)^2} = \sqrt{x^2 + (x^4 - R)^2} = R,$$

Откуда

$$x^2(x^6 - 2Rx^2 + 1) = 0,$$

$$x = 0, \quad R = \frac{x^6 + 1}{2x^2}.$$

Найдем решение графически. Пусть $x > 0$, тогда **единственное решение** будет в точке минимума функции $y = \frac{x^6 + 1}{2x^2}$. Минимум имеет место при $x = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, тогда $R = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$.



Ответ: $\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$.