

14.03.2014

XII открытая олимпиада по математике

УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

I курс - группа А (технические специальности)



1. Найти: а) $y'(0)$, если $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2014)$;

б) $f'(4)$, если $f\left(\frac{x-2}{x+4}\right) = x$.

2. Найдите значения параметров a и b , если известно, что

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{2x+3}\right)^x = e$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1) + \sin bx}{\cos x + \cos 2x - 2} = \frac{4}{5}$.

3.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

- матрица размерности $n \times n$. Найти сумму элементов первой строки матрицы A^{n-1} .

4. Под действием некоторой силы точка двигалась по траектории $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$. Действие силы прекратилось в тот момент, когда точка занимала положение $A(2; 1)$. Определить дальнейшую траекторию точки.

5. Доказать, что плоскости $x - 2y + 2z + 3 = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$, $5x + 14y - 2z - 11 = 0$ образуют боковую поверхность некоторой треугольной призмы.

6. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1 см?

Желаем удачи!



14.03.2014

XII открытая олимпиада по математике
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»



II-IV курс - группа А (технические специальности)

1. Вычислить $\prod_{k=1}^{2014} i^k$, где i - мнимая единица.

2. а) Найти $y(4)$, если $x = 1 - 2y + 3y^2 - 4y^3 + \dots$.

б) Показать, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots = 1$.

3. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} - \sqrt[5]{n^5 + n^4} \right)$.

4. Найти $f^{(435)}(0)$, если $f(x) = \frac{1}{(1+x^3)(1+x^6)(1+x^{12})(1+x^{24})}$.

5. Вычислить $\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt[3]{y}} e^{2x-x^2} dx$.

6. Найти все действительные функции $f(x)$, удовлетворяющие уравнению $4f^3 + 3f' \cdot f^2 + (f')^3 = 0$, если $f(0) = 1$.

7. При каких значениях $a \in R$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + px + q$ и $y = ax + b$, будет наименьшей (p, q, b - заданные числа, причем $b > q$). Найти эту площадь.

Желаем удачи!



14.03.2014

XII открытая олимпиада по математике УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

I курс - группа Б (экономические специальности)



1. Найти: а) $y'(0)$, если $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2014)$; б) $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, если $f\left(\frac{x}{x+2}\right) = x$.

2. Найдите значения параметров a и b , если известно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{2x+3}\right)^x = e$.

3. Построить график функции $y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Найти условие, которому должны удовлетворять числа a , b и c , чтобы система уравнений $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = a \\ 4x + 5y + 6z = b \\ 5x + 6y + 7z = c \end{cases}$ могла иметь решения.

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x , а две другие – на графике функции $y = (x-1)(7-x)$, $y \geq 0$?

6. При каких значениях m функция $f(x) = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 48mx + 6x - 3$ возрастает на всей числовой оси?

Желаем удачи!

14.03.2014

XII открытая олимпиада по математике УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

II-IV курс - группа В (экономические специальности)



1. а) Наудачу взято пятизначное число, составленное из цифр 0, 1, 2, 3, 5. Какова вероятность, что оно делится на 5?

б) Между четырьмя игроками в домино поровну распределяются 28 костей. Сколькими способами могут распределиться кости домино?

2. Вычислить: $\int_0^{\pi} (|\sin 2014x| - |\sin 1917x|) dx$.

3. Найти сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}$. 4. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$.

5. Известно частное решение $y_1 = \cos x$ дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = \sin x - \cos x$, $p, q \in R$. Найти его общее решение.

6. Курс рубля по отношению к доллару падает на $28\frac{4}{7}\%$ в квартал. Что выгоднее:

а) сделать валютный вклад на год с начислением 60% годовых или б) конвертировать доллары в рубли и сделать рублевый вклад с начислением 510% годовых?

Желаем удачи!

14.03.2014

XII открытая олимпиада по математике
УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

10-11 класс (школьники)



1. В одном государстве (сказочном) не найдется двух человек, у которых оказался бы одинаковый состав зубов: либо у них разное число зубов, либо зубов нет в разных местах. Оцените наибольшую численность населения в этом государстве, если максимальное число зубов у одного человека 32.

2. При каких значениях параметра k сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2kx + 2k^2 - 6k + 8 = 0$ является наименьшей?

3. Решить систему:
$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

4. В уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$ подберите постоянные коэффициенты a , b и c так, чтобы парабола касалась прямой $y = x$ при $x = 1$ и проходила через точку $(-1; 0)$.

5. На плоскости Oxy построить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - 4 \leq \sqrt{4y - x^2}$.

6. При каких $x \in R$ числа $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $\frac{x^2 + 3x - 1}{3}$, $x - 1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

Желаем удачи!

