_28.02.2019_

XVII открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

I курс

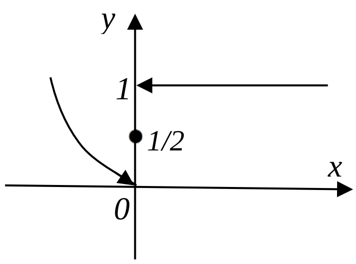
1. Какой наибольший угол могут образовывать векторы $\vec{a}=(y,-x,2)$ и $\vec{b}=(x,y,-1)$?

Решение. $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{yx-xy-2}{\sqrt{x^2+y^2+4}\sqrt{x^2+y^2+1}}=-1$ *при* $x=y=0$.

Ответ: π **.**

2. Построить график функции: $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Решение.



При $x<0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}=x^2$.

При $x=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{1}{2}$.

При $x>0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}=1$.

3. Найти производную 30-го порядка от функции $y=x\cdot\cos^2 x$ при $x=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. *Учтем, что* $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. $y=x\cos^2 x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}x\cos 2x$.

Используем формулу Лейбница:

$$y^{(30)}=\frac{1}{2}(x\cdot\cos 2x)^{(30)}=\frac{1}{2}\left(x\cdot 2^{30}\cdot\cos\left(2x+\frac{30\pi}{2}\right)+30\cdot 2^{29}\cdot\cos\left(2x+\frac{29\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2^{29}(-x\cos 2x-15\sin 2x).$$

Ответ: $y^{(30)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2^{29}\left(\dfrac{\pi}{6}-15\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Найти произведение всех элементов матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}^{2019}$.

Решение.

Заметим, что $A=B^{2019}$, *при этом* $B^2=10E$, *где* E *–единичная матрица. Тогда* $A=B^{2019}=B^{2018}\cdot B=\left(B^2\right)^{1009}\cdot B=10^{1009}\cdot B$. *Тогда произведение всех элементов матрицы* A *равно* $-9\cdot 10^{4036}$.

Ответ: $-9\cdot 10^{4036}$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{6k}{n\sqrt{n}}$, если $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>*Решение.*</u>

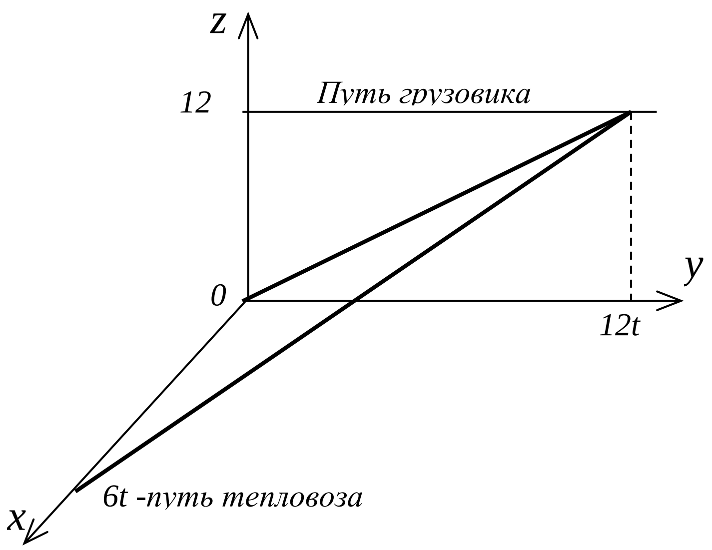
$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{6k}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{18k^2}{n^3}\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{18k^2}{n^3}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{18k^2}{n^3}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-18\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-18\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)}=e^{-6}.$$

Ответ: e^{-6}.

6. Автомобильный мост находится на высоте 12 метров над железной дорогой. В некоторый момент времени грузовик на мосту находится прямо над идущим внизу тепловозом. Пути грузовика и тепловоза образуют прямой угол. Скорость тепловоза 6 м/с, скорость грузовика 12 м/с. С какой скоростью будет увеличиваться расстояние между грузовиком и тепловозом через 10 с?

<u>*Решение.*</u>



Путь, пройденный тепловозом за время t секунд, равен $6t$ *м. Путь, пройденный грузовиком за то же время,* $12t$ *м. Расстояние между грузовиком и тепловозом через t секунд:*

$$l(t)=\sqrt{12^2+(12t)^2+(6t)^2}=6\sqrt{4+5t^2}.$$

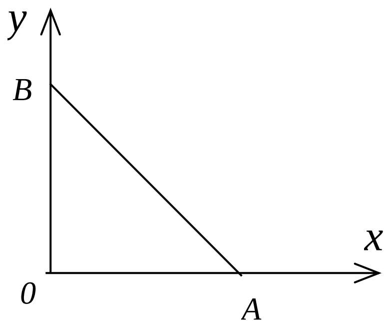
Скорость изменения пути определяется производной:

$$l'(t)=\frac{30t}{\sqrt{4+5t^2}}.\qquad l'(10)=\frac{50}{\sqrt{14}}\frac{m}{c}.$$

Ответ: Расстояние будет увеличиваться со скоростью $\dfrac{50}{\sqrt{14}}\dfrac{m}{c}$.

7. Касательная к кривой, заданной параметрически: $\begin{cases}x=t^2,\\ y=1-t^3,\end{cases}$ отсекает треугольник в первой четверти. Найти наименьшую возможную площадь треугольника.

<u>*Решение.*</u>



Производная функции, заданной параметрически,

$$y'(x)=\frac{-3t^2}{2t}=-\frac{3}{2}t.$$

Найдем уравнение касательной: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0).$

$$y-(1-t^3)=-\frac{3}{2}t(x-t^2). \qquad y+\frac{3}{2}t\,x=1+\frac{1}{2}t^3.$$

Зная точки пересечения касательной с осями координат: $A\left(\frac{t^3}{3}+\frac{2}{3t};0\right)$, $B\left(0,1+\frac{t^3}{2}\right)$,

найдем площадь треугольника: $S_{\vartriangle AOB}=\frac{1}{6}\left(\frac{t^5}{2}+2t^2+\frac{2}{t}\right).$

Исследуем функцию на экстремум: $S'_{\vartriangle AOB}=\frac{1}{6}\left(\frac{5t^4}{2}+4t-\frac{2}{t^2}\right)=0,\qquad t_0=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$

Можно показать, что в точке t_0 *площадь достигает минимума:*

$$S_{\min}=\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}}+2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right).$$

Ответ: При $t_0=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.\quad S_{\min}=\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{25}}+2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right).$

1. Решить уравнение $4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^n x}{n!}$.

Решение.

$$\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\ln x)^n}{n!}; \qquad \frac{4}{3}\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} = e^{-\ln x}, \quad 0 < x < \sqrt{3}.$$

$$\frac{4}{3+x^2} = \frac{1}{x}, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0, \qquad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

2. Найти $f(x)$, если $\exp\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right) = f(x)$.

Решение. *Продифференцируем равенство:* $\exp\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot f(x) = f'(x)$ *или*

$$f^2(x) = f'(x), \qquad \frac{df(x)}{f^2(x)} = dx, \qquad x + C = -\frac{1}{f(x)}, \qquad f(x) = -\frac{1}{x+C},$$

Заметим, что при $x = 0$ $f(0) = 1$. *Тогда* $C = -1$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

3. В декартовой системе координат найти длину кратчайшего пути из точки $A(1;1;-1)$ в точку $B(-2;0;4)$, заходя по пути на ось OZ.

Решение. *Обозначим точку попадания на ось OZ через C. Эта точка не меняется, если совершить поворот точки A относительно оси OZ. Повернём её так, чтобы она оказалась в плоскости XOZ, там же, где находится точка B.* $A'B$ *- отрезок прямой, пересечение которой с OZ даст точку C.*

$$A'(\sqrt{2},0,-1), \quad A'B = \sqrt{(\sqrt{2}+2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{31+4\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{31+4\sqrt{2}}$.

4. Вычислить $\int |2x-1|\,dx$.

Решение.

$$\int |2x-1|\,dx = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + C_1 \quad \textit{при} \quad x > \frac{1}{2}.$$

$$\int |2x-1|\,dx = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + C_1 \quad \textit{при} \quad x < \frac{1}{2}.$$

$C_1 = C_2 = C$ *при* $x = 0.$

$$\textbf{\textit{Ответ:}}\ \int |2x-1|\,dx = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sgn}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C. \ \left(\operatorname{sgn} a = \frac{|a|}{a}\right).$$

5. Найти площадь области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} |z+3-4i| + |z-3+4i| \geq 14, \\ |z+3-4i| + |z-3+4i| \leq 26. \end{cases}$$

Решение.

$|z-z_0|$ - расстояние от точки z до точки z_0.

Тогда, если $F_1(-3;4i)$, $F_2(3;-4i)$, уравнение $|z-F_1|+|z-F_2|=14$ задает эллипс с фокусным расстоянием $|F_1F_2| = 2c = \sqrt{(3+3)^2+(4+4)^2} = 10$, $c = 5$ и полуосями $a_1 = 7$ и $b_1 = \sqrt{a_1^2 - c^2} = \sqrt{49-25} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

Уравнение $|z-F_1|+|z-F_2|=26$ задает эллипс с тем же фокусным расстоянием и полуосями $a_2 = 13$ и $b_2 = \sqrt{a_2^2 - c^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12.$

Система неравенств задает область между двумя эллипсами, площадь которой равна $S = S_2 - S_1 = \pi a_2 b_2 - \pi a_1 b_1 = \pi\left(156 - 14\sqrt{6}\right).$

Ответ: $\pi\left(156-14\sqrt{6}\right).$

6. Вычислить: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{3^n}$;

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3^{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}\right)}.$$

Пусть $x = \dfrac{1}{3}$. Найдем сумму ряда, применяя почленное интегрирование:

$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n = x\left(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\right) = x\left(x+x^2+\ldots+x^n+C\right)' =$$

$$= x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1+C\right)' = (\text{при}\quad n\to\infty \quad \text{и} \quad |x|<1) = x\left(\frac{1}{1-x}-1+C\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{3^n} = 3^{3/4}.$

Ответ: $3^{3/4}.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^2}.$

Решение.

Это предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=-\frac{1}{1+x}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

7. Известно, что $x_{n-2}+(n-1)\cdot x_{n-1}-n\cdot x_n=0$, при $n\geq 2,\ x_0=0,\ x_1=1.$ Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

<u>*Решение.*</u> *Выразим*

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{n}\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)=\frac{(-1)^2}{n(n-1)}\left(x_{n-2}-x_{n-3}\right)=\ldots=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(x_1-x_0\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Тогда

$$x_n=x_{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=x_{n-2}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=x_{n-3}+\frac{(-1)^{n-3}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=$$

$$=\ldots=x_1+\left(\frac{-1}{2!}+\frac{(-1)^2}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}.$$

Ответ: $1-\frac{1}{e}$.