27.02.2020

XVIII открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

II-IV курс (*технические специальности*)

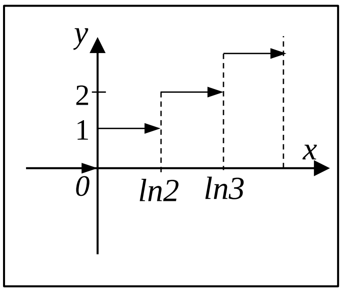
1. а) ***(10 баллов)*** Построить график функции $y = [e^x]$,
   б) ***(10 баллов)*** вычислить интеграл

$$\int_0^{50} \{x\}[x]dx,$$

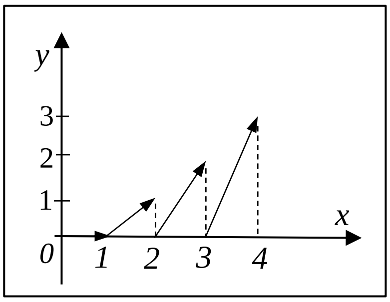
где $[x]$ – целая часть числа x, а $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Решение

а)



б)



Вычислим интеграл как сумму площадей треугольников:

$$\int_0^{50} \{x\}[x]dx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \cdots + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 49 = \frac{2450}{4}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{2450}{4}}$**.**

2. ***(10 баллов)*** Найти число решений системы $\begin{cases} |z - 3i - 1| = 6, \\ |z + i - 4| = a \end{cases}$ в зависимости от значений параметра $a \in R$.

Решение

Даны две окружности: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 6^2$ и $(x-4)^2 + (y+1)^2 = a^2$.

Ответ: Одно решение при $\boldsymbol{a = 1, a = 11}$**.**

Нет решений при $\boldsymbol{0 \le a < 1,\ a > 11}$**.**

Два решения при $\boldsymbol{1 < a < 1}$**.**

3. ***(10 баллов)*** Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}\, sin\frac{3\pi n}{4}}{n!}\cdot\left(\frac{5\pi}{4}\right)^n .$$

Решение

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}\,sin\frac{3\pi n}{4}}{n!}\cdot\left(\frac{5\pi}{4}\right)^n = Im\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}5\pi}{\sqrt{2}\cdot 4}\right)^n = Im\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{(-1+i)5\pi}{4}\right)^n =$$

$$= Im\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{(-1+i)5\pi}{4}\right)^n = Im e^{-\frac{5\pi}{4}}e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-\frac{5\pi}{4}}sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{4}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{4}}$.

4. ***(10 баллов)***
Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x - x^4 - |y-1| = 0$.

Решение

$y = x - x^4 + 1$ при $y > 1$,
$y = 1 - x + x^4$ при $y < 1$.

Тогда площадь $S = 2\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

5. ***(10 баллов)*** Решить дифференциальное уравнение

$$\int_0^{y'(x)}\frac{cosx\,dx}{2sinx+3} = \frac{1}{2}lnx, \qquad y(1) = 1.$$

Решение

Проинтегрируем обе части уравнения: $y' = arcsin\frac{3x-3}{2}$.

После интегрирования по частям, учитывая начальное условие, получим:

Ответ: $y = (x-1)arcsin\frac{3x-3}{2} + \sqrt{1-\left(\frac{3x-3}{2}\right)^2}$.

6. ***(10 баллов)*** Найти сумму $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$, если x_1, x_2, x_3 - корни многочлена $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Решение

$\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3} = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $\qquad \frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3} = \left.\frac{3x^2-3}{x^3-3x-1}\right|_{x=2} = 9$.

Ответ: **9**.