<u>25.02.2022</u>

XX открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

9-10 класс (школьники)

<u>Все задачи оценивались в 10 баллов.</u>

1. В выражении $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10$ нужно расставить скобки так, чтобы результат был: а) минимален, б) максимален.

Решение.

а) $((((((((1:2):3):4):5):6):7):8):9):10) = \frac{1}{10!}$ (или без скобок).

б) $1:(((((((2:3):4):5):6):7):8):9):10) = \frac{10!}{4}$.

2. Сумма чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1011}$ равна 2022^2. Найти a_{17}, если известно, что

$$\frac{a_1}{a_1+1} = \frac{a_2}{a_2+3} = \frac{a_3}{a_3+5} = \cdots = \frac{a_{1011}}{a_{1011}+2021}.$$

Решение.

Перевернем дроби:

$$\frac{a_1+1}{a_1} = \frac{a_2+3}{a_2} = \frac{a_3+5}{a_3} = \cdots = \frac{a_{1011}+2021}{a_{1011}},$$

тогда

$$\frac{1}{a_1} = \frac{3}{a_2} = \frac{5}{a_3} = \cdots \quad , \qquad a_n = (2n-1)a_1,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1\big(1 + 3 + \cdots (2n-1)\big) = a_1 n^2,$$

при $n = 1011$:

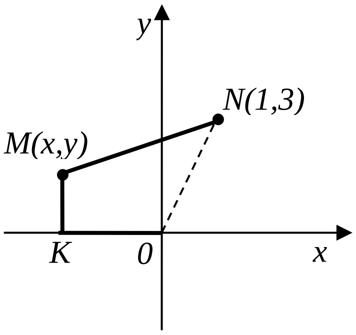
$$a_1 \cdot 1011^2 = 2022^2,\ \ a_1 = 4,\ \ \ a_{17} = (2 \cdot 17 - 1) \cdot 4 = 132.$$

Ответ: $\boldsymbol{a_{17} = 132}$.

3. Найти наименьшее значение выражения

$$f(x,y) = |x| + |y| + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10}\,.$$

Решение.



$f(x,y) = |x| + |y| + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$.

Пусть $M(x,y)$, $N(1{,}3)$ - точки на плоскости. Тогда

$|NM| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$, $|KO| = |x|$, $|MK| = |y|$

и $f(x,y)$ – длина ломаной $NMKO$. Среди всех ломаных наименьшую длину имеет отрезок NO. $|NO| = \sqrt{10}$.

Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{10}}$.

4. Даны две геометрических прогрессии. Известно, что

$$a_1 = b_1 = 1,\ \ a_2 + b_2 = 3,\quad a_5 + b_5 = 161\,.$$

Найти $a_6 + b_6$.

Решение.

Прогрессии имеют вид:

$$a_1+a_2+a_3+\dots=1+x+x^2+\cdots\ ,\quad b_1+b_2+b_3+\dots=1+y+y^2+\cdots\ .$$

$$a_5+\ b_5=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=((x+y)^2-2xy)^2-2x^2y^2=$$
$$=(9-2xy)^2-2x^2y^2=161.$$

Откуда $xy=20$ или $xy=-2$.

Система $\begin{cases}xy=20,\\x+y=3\end{cases}$ решений не имеет, а система $\begin{cases}xy=-2,\\x+y=3\end{cases}$ имеет решения.

Тогда при $xy=-2$

$$a_6+\ b_6=x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=$$
$$=(x+y)\big(x^4+y^4-xy((x+y)^2-3xy)\big)=3\big(161-xy(9-3xy)\big)=573.$$

***Ответ:* $\boldsymbol{a_6+\ b_6=573}$.**

5. В кабинете стоит 14 столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками. Общее число ящиков 33. Столов с одним ящиком столько же, сколько с двумя и тремя ящиками вместе. Сколько столов с одним ящиком?

Решение.

Пусть x, y, z, v – число столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками.

$$\begin{cases}x+y+z+v=14,\\x+2y+3z+4v=33,\\x=y+z.\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}v=14-2y-2z,\\3y+4z+4(14-2y-2z)=33,\\x=y+z.\end{cases}$$

Откуда $\qquad -5y-4z=33-56, \qquad 5y+4z=23.$

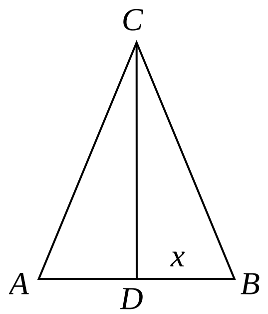
$y=1$: $\emptyset$,

$y=2$: $\emptyset$,

$y=3$: $z=2 \implies x=5, \quad v=4.$

Ответ: 5.

6. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна 12. При этом сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна 83/8. Найти стороны треугольника.



Решение.

Пусть $AB=2x$, $AC=BC=y$, $CD=12$, $\quad y^2-x^2=144$.

Площадь треугольника ABC:

1) $S=\frac{xy^2}{2R}$, где $R-$ радиус описанной окружности.

2) $S=pr=(x+y)r$, где $r-$ радиус вписанной окружности.

3) $S=12x$.

Тогда $\begin{cases}R+r=\frac{12x}{x+y}+\frac{y^2}{24}=\frac{83}{8}\ ,\\ y^2-x^2=144\ .\end{cases}$

Система $\begin{cases}y=\frac{13}{5}x\ ,\\y^2-x^2=144\end{cases}$ имеет решения $x=5, y=13$.

Система $\begin{cases}y=\frac{1}{7}x\ ,\\y^2-x^2=144\end{cases}$ не имеет решений.

Ответ: 10, 13, 13.

<u>25.02.2022</u>

XX открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

11 класс (школьники)

<u>Все задачи оценивались в 10 баллов.</u>

1. Решить уравнение

$$\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{log_x 12}.$$

Решение. $x > 0,\ x \neq 1.$

Умножим левую и правую часть уравнения на $\frac{3}{2}$.

$$\frac{x}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{log_x 12 - 1}, \quad \frac{x}{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{log_x \frac{12}{x}}, \quad log_{2/3}\frac{x}{12} = log_x \frac{12}{x}, \quad log_{3/2}\frac{12}{x} = log_x \frac{12}{x}.$$

Ответ: $\boldsymbol{x = 12}$ ***или*** $\boldsymbol{x = 3/2}$ **.**

2. В зависимости от значения параметра a решить уравнение

$$x^5 - 5x^3 + 5x = a^5 + \frac{1}{a^5}.$$

Решение.

$a \neq 0.$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^5 = a^5 + 5a^3 + 10a + \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} + \frac{1}{a^5} = a^5 + \frac{1}{a^5} + 5\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) + 10\left(a + \frac{1}{a}\right) =$$

$$= a^5 + \frac{1}{a^5} + 5\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 15\left(a + \frac{1}{a}\right) + 10\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Откуда

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^5 - 5\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 + 5\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^5 + \frac{1}{a^5},$$

$$x = a + \frac{1}{a}.$$

Ответ: $\boldsymbol{x = a + \frac{1}{a}}$***. При*** $\boldsymbol{a = 0}$ ***решений нет.***

3. Найти tgx, если

$$\begin{cases} ysinx + cosx = 2, \\ 2ycosx - 4sinx = -y. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} sinx = \dfrac{5y}{4 + 2y^2}, \\ cosx = \dfrac{8 - y^2}{4 + 2y^2}. \end{cases} \quad sin^2x + cos^2x = 1, \qquad (4 + 2y^2)^2 = 25y^2 + (8 - y^2)^2,$$

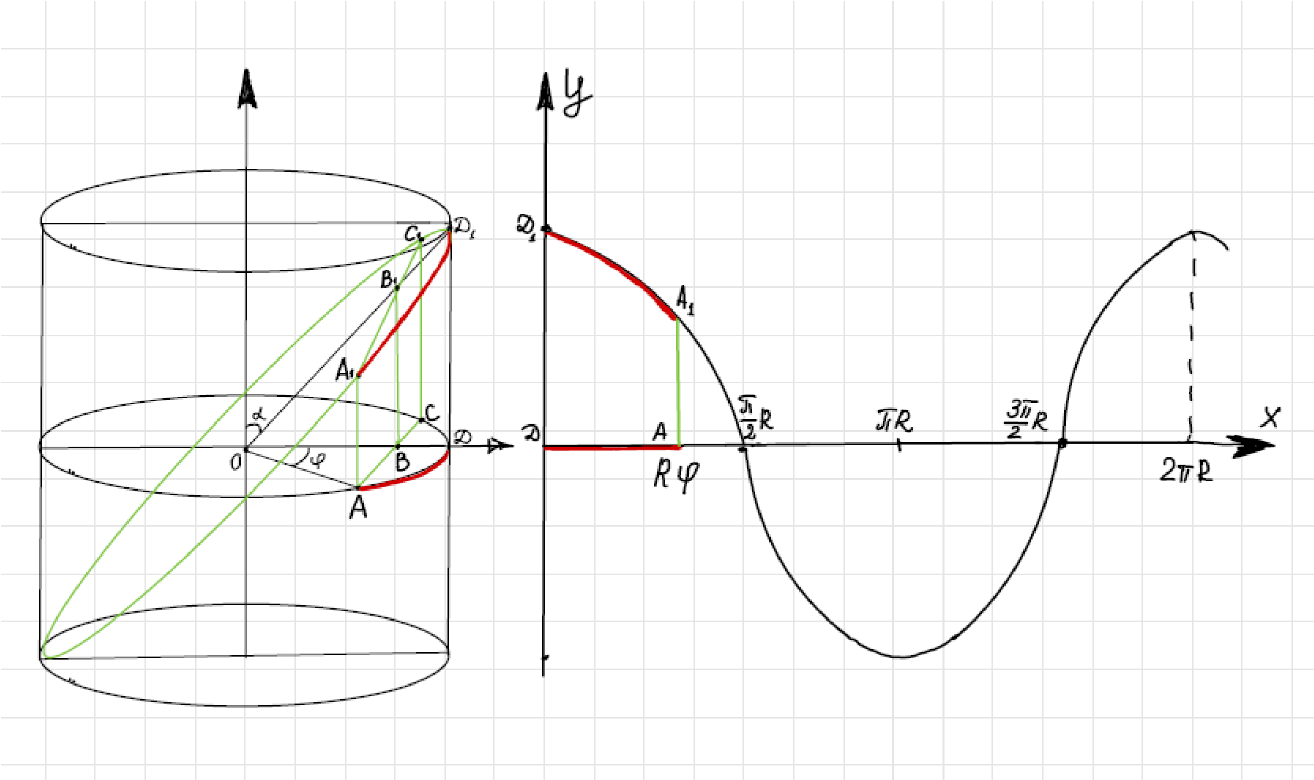
$$y^2 = 3 \ \ \left(y^2 = -\frac{32}{6} \text{ не подходит}\right).$$

Откуда $y = \pm\sqrt{3}$, $tgx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{5y}{8 - y^2} = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $tgx = \pm\sqrt{3}$.

4. Цилиндр с радиусом основания R косо срезан под углом α. Боковую поверхность цилиндра покрыли краской и покатили по плоскости. Найти уравнение кривой, ограничивающей окрашенную часть плоскости.

Решение.



$OA = OD = R.$

Из треугольника ODD_1 : $DD_1 = Rctg\alpha.$

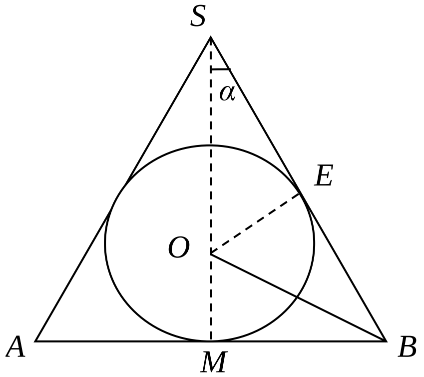
Пусть переменная x равна длине дуги AD, $x = R\varphi$, $\varphi = \frac{x}{R}$.

Пусть переменная $y = y(\varphi) = AA_1 = BB_1 = CC_1$,

$$y = \frac{OB \cdot DD_1}{R} = \frac{R\,cos\varphi \cdot DD_1}{R} = DD_1 cos\varphi = R\,ctg\alpha \cdot cos\frac{x}{R}.$$

Ответ: $y = R\,ctg\alpha \cdot cos\frac{x}{R}$ (Возможен другой вид ответа).

5. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α.



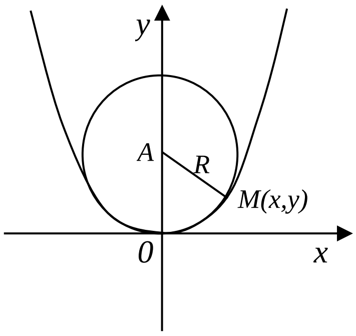
Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса. V_1 – объем конуса, V_2 - объем шара, R- радиус основания конуса, $OE = OM = r$ – радиус шара,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2|SM|}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{4}ctg^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)ctg\alpha\,,$$

так как $|SM| = Rctg\alpha$, $\frac{r}{R} = \frac{OM}{MB} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}ctg^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)ctg\alpha = \frac{ctg\alpha}{4}\left(\frac{1+tg\alpha/2}{1-tg\alpha/2}\right)^3$.

6. В цилиндрический стакан, имеющий внутри осевое сечение вида $y = x^4$, опущен металлический шарик. Каким должен быть радиус шарика, чтобы он касался нижней точки дна стакана.

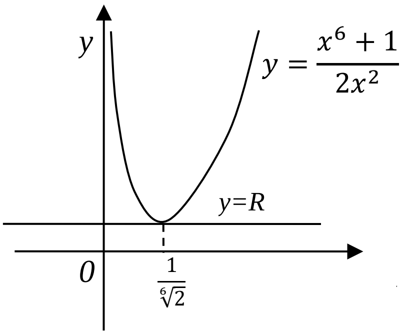


Решение.

$$|AM| = \sqrt{x^2 + (y - R)^2} = \sqrt{x^2 + (x^4 - R)^2} = R,$$

Откуда

$$x^2(x^6 - 2Rx^2 + 1) = 0, \quad x = 0\,, \quad R = \frac{x^6+1}{2x^2}.$$



Найдем решение графически. Пусть $x > 0$, тогда единственное решение будет в точке минимума функции $y = \frac{x^6+1}{2x^2}$. Минимум имеет место при $x = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, тогда $R = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$.