# Решения задач

**<u>25.02.2021</u>**

*XIX открытая олимпиада по математике*

*ГГТУ им. П.О.Сухого*

**II-IV курс**

1. (*10 баллов*) Найти число решений системы

$$\begin{cases} |z + 2i - 1| = 3, \\ |z - 1| = a \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра $a \in R$.

*Решение.*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9, \\ (x-1)^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

$a \geq 0$. При $a > 5$ и $0 \leq a < 1$ нет решений; при $1 \leq a < 5$ два решения; при $a = 1$ и $a = 5$ - единственное решение (окружности касаются внутренним образом).

2. (*10 баллов*) Найдите значение $y^{(45)}(0)$, если

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots.$$

*Решение.*

$$x = e^y - 1, \; y = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

С другой стороны,

$$y = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Приравняем коэффициенты при $x^{45}$:

$$\frac{(-1)^{44}}{45} = \frac{y^{(45)}(0)}{45!}, \qquad y^{(45)}(0) = 44!$$

***Ответ:*** $y^{(45)}(0) = 44!$

3. (*10 баллов*) Известно, что $\int_0^x t\, y\, dt = x^2 + y$. Найти функцию $y(x)$ и исследовать ее на экстремум.

*Решение.*

*Внимание!*

***Функция $\boldsymbol{y = y(x)}$, а значит под знаком интеграла $\boldsymbol{y = y(t)}$ и выносить ее нельзя!*** *(только один человек решил правильно).*

Продифференцируем обе части уравнения:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\, y\, dt = \frac{d}{dx}(x^2 + y), \qquad xy = 2x + y', \qquad \frac{dy}{y-2} = xdx,$$

$$\ln|y-2| = \frac{x^2}{2} + ln|C|, \qquad y = 2 + Ce^{x^2/2}.$$

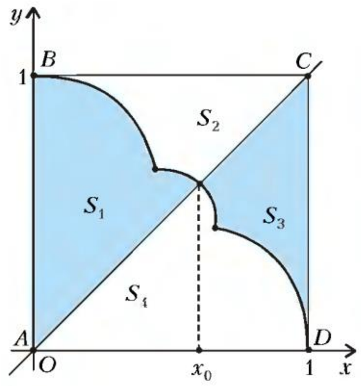
Из условия следует, что при $x = 0$ $y(0) = 0$, тогда $C = -2$.

Итак, функция $y = 2 - 2e^{x^2/2}$ имеет максимум в точке $(0; 0)$.

4. (*5 баллов*) Известно, что непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$, $f(0) = 1$. Вычислить

$$\int_0^1 |x - f(x)|\, dx .$$

***Здесь под $\boldsymbol{f^{-1}}$ подразумевалась обратная к $\boldsymbol{f}$ функция, а не $\boldsymbol{\frac{1}{f}}$ !***




*Решение (ожидаемое).*

График функции $y = f(x)$ симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла $y = x$. Значит, $S_1 = S_4$, $S_2 = S_3$.

$$\int_0^1 |x - f(x)|\, dx = \int_0^{x_0} \big(x - f(x)\big)dx + \int_{x_0}^1 \big(x - f(x)\big)dx =$$

$$= S_1 + S_3 = \frac{1}{2}.$$

***Но, поскольку все дружно решили, что $\boldsymbol{f^{-1} = \frac{1}{f}}$, защитывалось решение:***

$f^2 = 1$, так как $f(0) = 1$, то $f = 1$. Тогда

$$\int_0^1 |x - 1|\, dx = \int_0^1 (1 - x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

5. (*10 баллов*) Для целого положительного $n$ вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left(cosx \cdot cos2x \cdot cos4x \cdot \ldots \cdot \cos(2^{n-1}x)\right) dx.$$

*Решение.*

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \cdot \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{e^{i2^{n-1}x} + e^{-i2^{n-1}x}}{2}\right) dx.$$

Подинтегральная функция содержит сумму слагаемых вида $e^{imx}$, где $m$ - целое и $m \neq 0$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}\, dx = \frac{1}{im} e^{imx}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{im}\left(e^{2\pi m i} - 1\right) = 0.$$

6. (*10 баллов*) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} tg\, \frac{x}{2^n}.$$

*Решение.*

Пусть $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}$.

$$\int_0^x S_N(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \int_0^x \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} dx = -\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\frac{x}{2^n} = -\ln\prod_{n=1}^{N} \cos\frac{x}{2^n} =$$

$$= -\ln \frac{\sin\frac{x}{2^N}\cos\frac{x}{2^N}\cos\frac{x}{2^{N-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^N}} = -\ln\frac{\sin x}{2^N \sin\frac{x}{2^N}}.$$ Следовательно,

$$S_N(x) = \frac{d}{dx}\left(-ln\frac{sinx}{2^N sin\frac{x}{2^N}}\right) = -ctgx + \frac{1}{2^N} ctg\frac{x}{2^N} \to \frac{1}{x} - ctgx, \qquad \text{при } N \to \infty.$$

Ответ: $S(x) = \frac{1}{x} - ctg(x)$.