Решения задач

<u>25.02.2021</u>

XIX открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

Школьники 9-10 класс

1. При каких значениях параметра $a \in R$ система

$$\begin{cases} x^2 + y = 2x + a, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет решения?

Решение.

Выделим полный квадрат в уравнениях

$$\begin{cases} y = 1 + a - (x-1)^2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение задает параболу с вершиной в точке $(1, 1+a)$ и ветвями, направленными вниз. Второе уравнение задает окружность с центром в точке $(1, 0)$ и радиусом 1.

Для того чтобы существовали точки пересечения параболы и окружности, необходимо:

1) $y = 1 + a \geq -1, \quad a \geq -2.$

2) уравнение $y^2 - y + a = 0$ имеет решения при $a \leq \frac{1}{4}$.

Ответ: $\boldsymbol{-2 \leq a \leq \frac{1}{4}}$.

2. Участники соревнований по бегу в мешках разделились на три группы. В первой группе более трети всех участников, во второй более 30%, в третьей более 4/11. Найти наименьшее возможное число участников.

Решение.

Пусть S - общее количество участников, x_1 – количество участников первой группы, , x_1- второй, , x_3 – третьей. Тогда в соответствии с условием задачи

$$x_1 + x_2 + x_3 = S, \quad x_1 \geq \frac{1}{3}S, \quad x_2 \geq \frac{3}{10}S, \quad x_3 \geq \frac{4}{11}S.$$

Пусть

$$x_1 = \frac{1}{3}S + k_1, \quad x_2 = \frac{3}{10}S + k_2, \quad x_3 = \frac{4}{11}S + k_3\,, \qquad (1)$$

где k_1, k_2, k_3 – положительные добавки.

$$S = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{10} + \frac{4}{11}\right)S + k_1 + k_2 + k_3,$$

$$S = 330 \cdot (k_1 + k_2 + k_3).$$

Перепишем уравнения (1)

$$\begin{cases} 3x_1 = S + 3k_1, \\ 10x_2 = 3S + 10k_2\,, \\ 11x_3 = 4S + 11k_3. \end{cases}$$

Так как S, x_1, x_2, x_3 – целые числа, то и $3k_1, 10k_2, 11k_3$ тоже должны быть целыми, при этом

$$k_1 \geq \frac{1}{3}, \quad k_2 \geq \frac{1}{10}, \quad k_3 \geq \frac{1}{11}.$$

Наименьшие значения для k_1, k_2, k_3: $\quad k_1 = \frac{1}{3}, \quad k_2 = \frac{1}{10}, \quad k_3 = \frac{1}{11}.$

$S_{min} = 173.$

Ответ: $S_{min} = 173.$

3. Найти уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от линии $x^2 + y^2 - 4y = 0$ и от оси абсцисс.

Решение.

Окружность $x^2 + (y-2)^2 = 4$ имеет центр в точке $C(0; 2)$ и радиус 2. Пусть $M(x; y)$ - произвольная точка искомой линии. Тогда расстояния MN до оси Ox и MK до окружности равны.

$MN = MK,\ MN = y,\ MK = MC - R,$

$$y = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} - 2,$$

$(y+2)^2 = (y-2)^2 + x^2$ или $x^2 = 8y$. Получили параболу.

Ответ: $\boldsymbol{x^2 = 8y}$.

4. Один из углов треугольника равен $3\pi/4$, радиус вписанной в него окружности равен 4, а периметр треугольника равен $16\left(6 + \sqrt{2}\right)$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение.

Пусть A_1, B_1, C_1 - точки, в которых окружность с центром O касается сторон треугольника ABC.

$AC_1 = x$, $BC_1 = y$, $CB_1 = z$, R — радиус описанной окружности, тогда $\angle B_1AO = \angle C_1AO = \frac{3\pi}{8}$, $B_1A = x$, $BA_1 = y$, $CA_1 = z$, $BC = y + z$, $R = \dfrac{y+z}{2\sin\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{y+z}{\sqrt{2}}$.

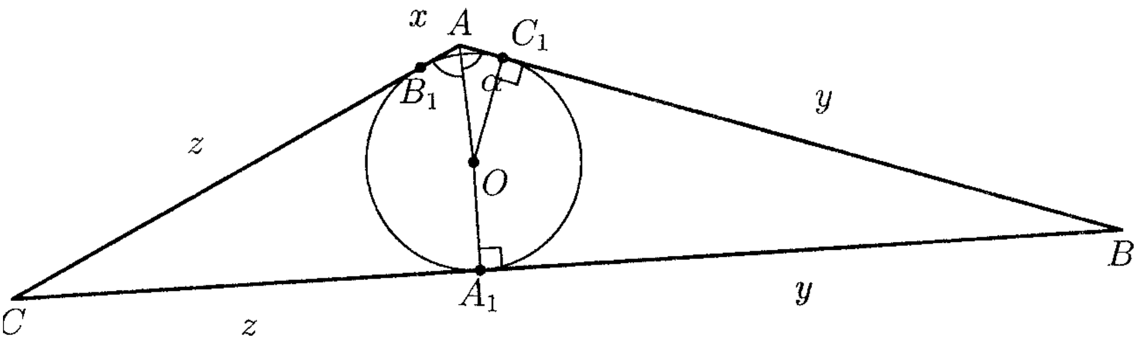

Рис. 4

Обозначим $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = t$, тогда $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2} = -1$, откуда $t = 1 + \sqrt{2}$, так как $t > 0$, $x = OC_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = \frac{4}{1+\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}-1)$. По условию $2(x+y+z) = 16(6+\sqrt{2})$, откуда $y + z = 8(6 + \sqrt{2}) - x = 52 + 4\sqrt{2}$, $R = \dfrac{52+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 26\sqrt{2} + 4$.

5. При каких значениях параметра a неравенство
$$sin^6x + cos^6x + a\,sinx\,cosx \geq 0$$
выполняется для всех x?

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства
$$(sin^2x)^3 + (cos^2x)^3 + a\,sinx\,cosx =$$
$$= (sin^2x + cos^2x)(sin^4x - sin^2xcos^2x + cos^4x) + a\,sinx\,cosx =$$
$$= (sin^2x + cos^2x)^2 - 3sin^2xcos^2x + a\,sinx\,cosx =$$
$$= 1 - \frac{3}{4}sin^2 2x + \frac{a}{2}sin2x.$$

Пусть $sin2x = y$, $-1 \leq y \leq 1$. Минимум функции $-\frac{3}{4}y^2 + \frac{a}{2}y + 1$ на отрезке [-1;1] достигается на концах отрезка, так как коэффициент при y^2 отрицателен.

Следовательно, $-\frac{3}{4}y^2+\frac{a}{2}y+1\geq 0$ выполняется на всем отрезке [-1;1] в том и только в том случае, когда трехчлен неотрицателен на концах отрезка

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}(-1)^2+\frac{a}{2}(-1)+1\geq 0, \\ -\frac{3}{4}1^2+\frac{a}{2}+1\geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leq \frac{1}{2}, \\ a\geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{1}{2}}$.