27.02.2020

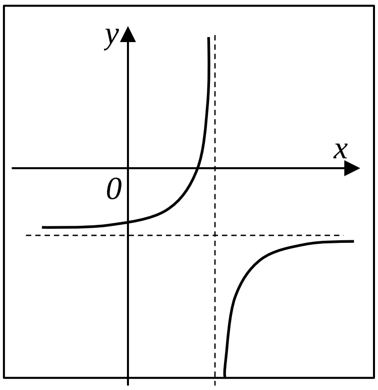
XVII открытая олимпиада по математике

ГГТУ им. П.О.Сухого

I-IV курс (*экономические специальности*)

1. ***(10 баллов)***

По виду графика функции $y=\frac{ax+b}{cx+1}$ определить знаки параметров a, b, c.



Решение.

1) Если $x=0,\ y=b<0$;

2) вертикальная асимптота:

$$cx+1=0,\quad x=-\frac{1}{c}>0,\quad c<0;$$

3) горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+1}=\frac{a}{c}<0,\quad a>0.$$

Ответ: $\boldsymbol{a>0,\ b<0,\ c<0}$.

2. ***(10 баллов)*** Найти произведение решений $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n$ системы линейных уравнений при $n=100$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n=1,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+2x_n=2,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+2x_4+\dots+2x_n=3,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+4x_4+\dots+2x_n=4,\\ \quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\dots+nx_n=n. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&2&2&2&\dots&2&1\\ 2&2&2&2&\dots&2&2\\ 2&2&3&2&\dots&2&3\\ 2&2&2&4&\dots&2&4\\ &.&.&.&.&.&.\\ 2&2&2&2&\dots&n&n \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} -1&0&0&0&\dots&0&-1\\ 2&2&2&2&\dots&2&2\\ 0&0&1&0&\dots&0&1\\ 0&0&0&2&\dots&0&2\\ &.&.&.&.&.&.\\ 0&0&0&0&\dots&n-2&n-2 \end{array}\right)$$

К каждой строке добавили вторую, умноженную на -1.

$$x_1=x_3=x_4=\dots=x_n=1,\quad x_2=1-(n-1)=2-n.$$

Тогда $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{2020}=2-100=-98$.

Ответ: $\boldsymbol{-98}$.

3. ***(10 баллов)*** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{8\sqrt[3]{5\ldots\sqrt{8\sqrt[3]{5}}}}}_{2n\text{ корней}}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^2+..+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\cdot5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2+..+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^n}=8^{\frac{3}{5}}\cdot5^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{5\cdot8^3}.$$

Ответ: $\sqrt[5]{\mathbf{5\cdot 8^3}}$.

4. ***(10 баллов)*** Решить систему $\begin{cases} a+[b]+\{c\}=1{,}1\ , \\ [a]+\{b\}+c=2{,}2\ , \\ \{a\}+b+[c]=3{,}3\ , \end{cases}$

где $[a]$ – целая часть числа a, $\{a\}$ – дробная часть числа a.

Решение.

Сумма трех уравнений системы: $a+b+c=3{,}3$. Вычтем из последнего равенства все уравнения системы:

$\begin{cases} \{b\}+[c]=2{,}2\ , \\ \{a\}+[b]=1{,}1\ , \\ \{c\}+[a]=0\ . \end{cases}$ Тогда $\begin{matrix} [a]=0,\ \{a\}=0{,}1\ , \\ [b]=1,\ \{b\}=0{,}2\ , \\ [c]=2,\ \{c\}=0. \end{matrix}$

Ответ: $\boldsymbol{a=0{,}1}$; $\boldsymbol{b=1{,}2}$; $\boldsymbol{c=2}$.

5. ***(10 баллов)*** Требуется определить длину и ширину земельного участка прямоугольной формы, одна из сторон которого должна прилегать к шоссе. Площадь участка должна равняться 150 га. Участок нужно огородить забором, причем 1 погонный метр забора, прилегающий к шоссе, стоит 10 руб, а один погонный метр забора на трех оставшихся сторонах стоит 5 руб. Какими должны быть стороны участка, чтобы стоимость забора была минимальной?

Решение.

Пусть x- длина стороны, прилегающей к шоссе, y-длина другой стороны.

Площадь $S=xy=1{,}5\cdot 10^6$ м^2.

Стоимость $C=15x+10y=15x+10\,\frac{1{,}5\cdot 10^6}{x}$,

$C'=15-\frac{15\cdot 10^6}{x^2}=0$ при $x=10^3$м –точка минимума.

Ответ: $\boldsymbol{x=1000}$м; $\boldsymbol{y=1500}$м.

6. ***(10 баллов)*** Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду – 14 кг, льву - 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда – 160, у каждой лисы – 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Решение.

Пусть x - количество львов, y – леопардов, z – лис.

$21x+14y+2z=111$, при этом $\begin{matrix} 1\le x\le 4, \\ 1\le y\le 6, \\ 1\le z\le 38. \end{matrix}$

«Полезность» каждого вида: львы - $\frac{230}{21}=10\frac{20}{21}$, леопарды - $\frac{160}{14}=11\frac{3}{7}$, лисы - $\frac{20}{2}=10$. Итак, леопардов должно быть больше всего. Можно показать, что наилучший вариант: 1 лев, 6 леопардов, 3 лисы.

Ответ: 1 лев, 6 леопардов, 3 лисы.